

# Cartes de contrôle CUSUM et EWMA

François Husson

UP mathématiques appliquées - Agrocampus Rennes

`husson@agrocampus-ouest.fr`

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Définition de la carte CUSUM
- 3 Choix de la carte - comparaison avec la carte de Shewart
- 4 Améliorations possibles de la carte CUSUM
- 5 Estimation de la date et de l'amplitude du dérèglement
- 6 Présentation de la carte EWMA

# Introduction

"Zéro défaut" n'existe pas en production

⇒ surveiller tout processus en contrôlant les objets fabriqués

2 types de contrôle : - de réception  
- en cours de fabrication

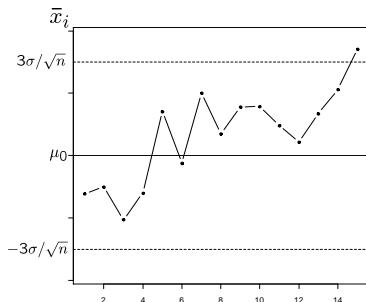
IDÉE SIMPLE : contrôler tous les objets mais

- pb de coût
- impossible si contrôle destructif
- inutile car c'est le processus qui est contrôlé

Carte de contrôle = signal d'alarme

## Carte de Shewart

si  $Processus \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma)$ , alarme si  $\bar{x}_i > 3\sigma/\sqrt{n}$  ou  $\bar{x}_i < -3\sigma/\sqrt{n}$



- simple
- décèle bien écarts brusques et importants
- détecte mal écarts petits et moyens ( $\approx 1$  à  $2 \sigma$ )

Usure d'une machine  $\implies$  dérèglement lent et progressif  
 Détection rapide permet de réagir avant gros dérèglement

# Comment détecter des dérèglages de petites ou moyennes amplitudes ?

## Comment détecter des dérégages de petites ou moyennes amplitudes ?

- augmenter la taille de l'échantillon prélevé à chaque contrôle

Pb : pas toujours possible :

- objets/unité de temps faible
  - mesure prend du temps
  - mesure coûte chère
- utiliser résultats du passé pour déceler dérive lente : règles des séries (analyse des structures de points sur la carte de Shewart).

Pb : hausse des fausses alarmes

## Définition de la carte CUSUM

Conditions d'application : Idem carte de Shewart

### Hypothèses :

- Mesures (ou moyennes de mesures) v.a. de même loi
- Variance du processus ( $\sigma^2$ ) et valeur cible ( $\mu_0$ ) connues
- Lois des variables normales (sert pour calculer l'efficacité des cartes)

$$\text{hyp} \implies \begin{cases} E(x_i) = \mu_0 & , & V(x_i) = \sigma^2 & \text{avant dérèglement} \\ E(x_i) = \mu_0 + \Delta & , & V(x_i) = \sigma^2 & \text{après dérèglement} \end{cases}$$

Hypothèses = fiction, mais utile pour prendre des décisions

## Construction de la carte

Notations :  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i$  moyennes de  $n$  résultats individuels successifs,

$$z_i = \sqrt{n} \frac{\bar{x}_i - \mu_0}{\sigma}$$

Si loi normale :

$$\begin{cases} \bar{x}_i \sim \mathcal{N}(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) & \Rightarrow z_i \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ avant dérèglement} \\ \bar{x}_i \sim \mathcal{N}(\mu_0 + \Delta, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) & \Rightarrow z_i \sim \mathcal{N}(\delta = \frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma}, 1) \text{ après dérèglement} \end{cases}$$



## Construction de la carte

Construction de 2 statistiques :

$$S_i^+ = \max \left( 0, S_{i-1}^+ + (z_i - k) \right) \quad \text{avec } S_0^+ = 0$$

$$S_i^- = \min \left( 0, S_{i-1}^- + (z_i + k) \right) \quad \text{avec } S_0^- = 0$$

Tant que  $S_i^+$  et  $S_i^-$  entre  $h$  et  $-h$  alors processus sous contrôle  
sinon processus hors contrôle

Statistique  $S_i^+$  détecte dérèglages positifs de la moyenne  
 $S_i^-$  détecte ses diminutions

$k$  = coefficient de filtrage

## Exemple

Valeur cible pour la moyenne  $\mu_0 = 10$ , écart-type  $\sigma = \sqrt{2}$

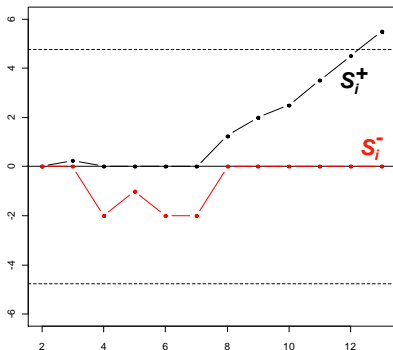
$\bar{x}_i$  : moyenne de 2 observations successives

$k = 0.5$  et les limites de contrôle  $h = 4.774$  (et  $-h = -4.774$ )

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{2}/\sqrt{2} = 1$$

Numéro du sous groupe i	$x_{i1}$	$x_{i2}$	$\bar{x}_i$	$z_i$	$S_i^+$	$S_i^-$	Alarme
0					0	0	
1	10.5	11.0	10.75	0.75	0.25	0	
2	10.0	9.0	9.50	-0.50	0	0	
3	11.5	10.0	10.75	0.75	0.25	0	
4	8.0	7.0	7.50	-2.50	0	-2	
5	9.5	11.5	10.50	0.50	0	-1	
6	8.0	9.0	8.50	-1.50	0	-2	
7	9.0	10.0	9.50	-0.50	0	-2	
8	11.5	12.0	11.75	1.75	1.25	0	
9	10.5	12.0	11.25	1.25	2.00	0	
10	13.0	9.0	11.00	1.00	2.50	0	
11	12.0	11.0	11.50	1.50	3.50	0	
12	11.0	12.0	11.50	1.50	4.50	0	
13	12.0	11.0	11.50	1.50	5.50	0	*

## Exemple (carte CUSUM)

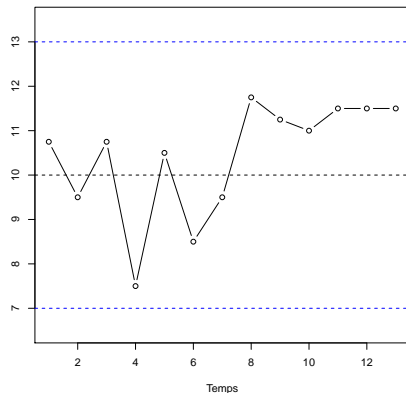


$k = 0.5$  et  $h = 4.774$

Processus sous-contrôle jusqu'à  $t = 12$ , alarme à  $t = 13$

```
library(qcc)
x <- c(10.75,9.5,10.75,7.5,10.5,8.5,9.5,11.75,11.25,11,11.5,11.5)
CUSUM <- cusum(data=x, sizes=2, # size = nb échantillon
  center=10, # center = mu_0
  std.dev=sqrt(2), # std.dev = sigma
  decision.interval = 4.774, # decision.interval = h
  se.shift=1) # se.shift = 2*k
```

## Exemple (carte Shewart)



Carte de Shewart avec les mêmes observations  $\Rightarrow$  Pas d'alarme

```
library(qcc)
x <- c(10.75,9.5,10.75,7.5,10.5,8.5,9.5,11.75,11.25,11,11.5,11.5,11.5)
Shewart <- qcc(data=x, sizes=2, center=10, std.dev=sqrt(2),
  type="xbar", nsigmas=3)
```

## Principe de la carte

Décalage positif de la moyenne supérieur à  $k$ , écarts  $(z_i - k)$  seront cumulés dans  $S_i^+$  jusqu'à ce que  $S_i^+$  atteigne  $h$

Pour éviter d'avoir à remonter le handicap d'une valeur négative :  
 $S_i^+ \geq 0$

Après un réglage, on réinitialise la carte CUSUM :  $S_0^+ = S_0^- = 0$

## Choix de la carte - comparaison avec la carte de Shewart

### Comment comparer deux cartes de contrôle ?

- Probabilité de déceler un dérèglement  
Carte de Shewart : proba connue  
Carte CUSUM : proba dépend du numéro du contrôle
- Période Opérationnelle Moyenne, POM  
 $POM_{\delta}$  : nb moyen de contrôle pour détecter un dérèglement  $\delta$
- Période Opérationnelle Maximum (POMAX)  
nb max de contrôles pour déceler un dérèglement (seuil 95%)

Rq : détection d'un dérèglement peut être rapide mais nb de fausses alarmes augmente ( $POM_0$  élevée et  $POM_{\delta}$  faible)

## Comparaison de la carte CUSUM et de la carte de Shewart

Déréglage $\delta$	Shewart $L = 3.00$		CUSUM $k = 0.5, h = 4.774$		CUSUM $k = 1, h = 2.517$	
	POM	POMAX	POM	POMAX	POM	POMAX
0.00	370		370		370	
0.25	281	841	122	369	197	631
0.50	155	464	35	99	69	205
0.75	81	242	16	37	28	76
1.00	44	130	9.9	20	13.6	36
1.50	15.0	44	5.5	10	5.5	13
2.00	6.3	18	3.9	6	3.3	6
2.50	3.2	9	3.0	4	2.4	4
3.00	2	5	2.5	4	1.9	3
4.00	1.2	2	2	3	1.3	2
5.00	1.03	1	1.61	2	1.07	2

Table – POM et POMAX pour cartes Shewart et CUSUM

Efficacité CUSUM > Shewart si dérégages faibles et moyens

Efficacité CUSUM < Shewart si dérégages élevés

## Choix des paramètres de la carte CUSUM

Trois paramètres à définir :  $h, k, n$  en fonction de :

- $\delta$ , dérèglement que l'on veut détecter rapidement
- $POM_0$

**Proposition** :  $k = \delta/2$

Prendre ensuite  $h$  pour obtenir la  $POM_0$  fixée

Dérèglement	nb contrôle			
petit ( $\approx \sigma$ )	10	$h = 4.77$	$k = 0.5$	$n$ tq $\delta = 1$
moyen	3	$h = 2.52$	$k = 1$	$n$ tq $\delta = 2$
important	au plus 2	$h = 1.6$	$k = 1.5$	$n$ tq $\delta = 3$
très important	dès le premier	choisir carte de Shewart		



# Améliorations possibles de la carte CUSUM

## QUALITÉS DE LA CARTE CUSUM :

- Bonne détection des petits et moyens dérèglages
- Bonne détection des dérives lentes

## DÉFAUTS DE LA CARTE CUSUM :

- Mauvaise réactivité si dérèglage dès le début
- Mauvaise détection des gros dérèglages

## Carte à réponse rapide

DÉTECTION DES DÉRÉGLAGES DÈS LE DÉMARRAGE

⇒ prendre  $S_0^+ = h/2$  et  $S_0^- = -h/2$

Déréglage $\delta$	CUSUM $k = 0.5$ $h = 5, S_0^+ = S_0^- = 0$	CUSUM $k = 0.5$ $h = 5, S_0^+ = -S_0^- = 1$	CUSUM $k = 0.5$ $h = 5, S_0^+ = -S_0^- = 2.5$
0.00	465	461	430
0.50	38	36	29
1.00	10.4	9.0	6.4
2.00	4.0	3.4	2.4
3.00	2.6	2.2	1.54
5.00	1.7	1.3	1.02

**Table** – Périodes Opérationnelles Moyennes comparées de la carte CUSUM avec Initialisation à Réponse Rapide

## Carte combinée CUSUM-Shewart

### Meilleure détection des dérèglages importants

⇒ carte combinée CUSUM-Shewart

Pb : nb de fausses alarmes augmente ⇒ prendre  $LCS = 3.5$  et  $LCL = -3.5$  pour carte de Shewart

Dérèglage $\delta$	Carte seule		Carte combinée CUSUM-Shewart		
	Shewart $L = 3.00$	CUSUM $k = 0.5, h = 5$	$k = 0.5, h = 5$		
			$L = 3.00$	$L = 3.50$	$L = 4.00$
0.00	370	465	223	391	459
0.50	155	38	34	37	38
1.00	43.9	10.4	9.8	10.2	10.4
2.00	6.3	4.0	3.5	3.8	4
3.00	2.0	2.6	1.8	2.1	2.4
5.00	1.02	1.7	1.02	1.07	1.16

**Table** – Comparaison des POM de la carte CUSUM et de cartes combinées CUSUM-Shewart

Carte allie qualités des cartes CUSUM et Shewart

## Estimation de la date et de l'amplitude du dérèglement

Si alarme :  $\left\{ \begin{array}{l} \text{réglage du processus} \\ \text{réinitialisation de la carte} \end{array} \right.$

### Question : que faire des dernières productions ?

- Si dérèglement faible : vente
- Si dérèglement important : tri exhaustif de toute la production

⇒ Estimation de l'amplitude du dérèglement

Si tri : jusqu'à quand doit-on tout reconstruire ?

⇒ Estimation de la date du dérèglement

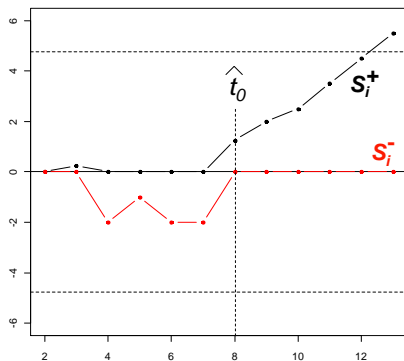
## Estimation de la date et de l'amplitude du dérèglement

Hypothèse : alarme au contrôle  $t$

$\hat{t}_0$  : estimateur de la date de dérèglement

$\hat{\delta}$  : estimateur de l'amplitude du dérèglement

- $\hat{t}_0$  : dernier point de contrôle tel que  $S_{\hat{t}_0-1} = 0$
- $\hat{\delta} = \frac{S_t^+}{t - \hat{t}_0 + 1} + k$  ou  $\hat{\delta} = \frac{S_t^-}{t - \hat{t}_0 + 1} - k$



## Carte EWMA (Exponential Weighted Moving Average)

- mêmes hypothèses que carte CUSUM
- plus simple d'utilisation, efficacité similaire

### Principe de la carte :

$$\begin{cases} z_i = \lambda \bar{x}_i + (1 - \lambda)z_{i-1} & \text{avec } 0 < \lambda \leq 1 \\ z_0 = \mu_0 \end{cases}$$

$z_i$  = moyenne pondérée du passé  $z_{i-1}$ , et du présent  $\bar{x}_i$

- $\lambda$  petit : résultats du passé importants, faibles dérives bien détectées
- $\lambda$  grand : bonne réactivité aux dérèglages brusques et élevés

Remarque : si  $\lambda = 1$  : carte de Shewart

## Détermination des limites de la carte

$$z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j \bar{x}_{i-j} + (1 - \lambda)^i z_0$$

$z_i$  = moyenne pondérée des  $\bar{x}_k$

$\bar{x}_k$  a un poids d'autant plus faible qu'il est loin dans le passé

$$\text{Var}(z_i) = \frac{\sigma^2}{n} \frac{\lambda (1 - (1 - \lambda)^{2i})}{2 - \lambda} \quad (\text{si indépendance des } \bar{x}_k)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Var}(z_i) = \sigma_z^2 = \frac{\sigma^2}{n} \frac{\lambda}{2 - \lambda}$$

Limite de contrôle supérieure  $LCS = \mu_0 + L\sigma_z$

Limite de contrôle inférieure  $LCI = \mu_0 - L\sigma_z$  avec  $L \approx 3$

## Définition de la carte EWMA

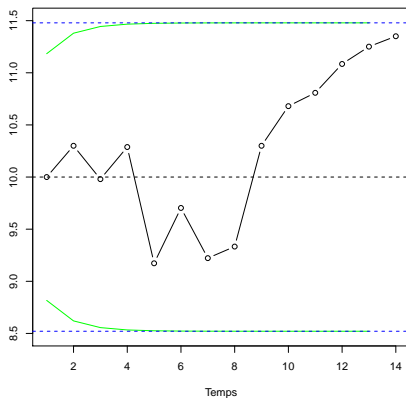


Figure – Carte EWMA avec  $\lambda = 0.4$  et  $L = 2.958$

Processus sous contrôle



## Définition de la carte EWMA

TROIS PARAMÈTRES À DÉFINIR :  $\lambda$ ,  $L$  et  $n$

Déréglage	Nb de contrôle		
petit	10	$L = 2.8$	$\lambda = 0.15$
moyen	3	$L = 2.96$	$\lambda = 0.4$
important	au plus 2	$L = 3$	$\lambda = 0.7$
très important	dès le premier	choisir une carte de Shewart	
			$n \text{ tq } \delta = 1$
			$n \text{ tq } \delta = 2$
			$n \text{ tq } \delta = 3$

## Périodes opérationnelles moyennes de la carte EWMA

$\delta$	Shewart $L = 3.00$		EWMA $\lambda = 0.5 L = 2.978$		EWMA $\lambda = 0.4 L = 2.958$		EWMA $\lambda = 0.25 L = 2.898$	
	POM	pomax	POM	pomax	POM	pomax	POM	pomax
0.00	370		370		370		370	
0.25	281	841	196	584	174	515	135	397
0.50	155	464	72	210	58	169	41	114
0.75	81	242	30	86	24	67	18	46
1.00	44	130	15.2	41	12.7	33	10.3	24
1.50	15.0	44	6.0	14	5.5	12	5.2	10
2.00	6.3	18	3.4	7	3.3	6	3.5	6
2.50	3.2	9	2.4	4	2.4	4	2.6	4
3.00	2	5	1.9	3	1.9	3	2.2	3
4.00	1.2	2	1.3	2	1.39	2	1.7	2
5.00	1.03	1	1.07	1	1.10	1	1.27	2

**Table** – Périodes Opérationnelles Moyennes et POMAX pour cartes Shewart et EWMA

Rq : Existence de cartes EWMA à réponses rapides et cartes combinées EWMA-Shewart