Rappels d'analyse factorielle

François Husson

Unité pédagogique de mathématiques appliquées - l'institut Agro

husson@agrocampus-ouest.fr

Rappels d'analyse factorielle

1. Décomposition en valeurs singulières (SVD)

2. SVD et images

3. Lien SVD et ACP, AFC, ACM

Décomposition en valeurs singulières : principe

Qu'est-ce qu'une matrice de rang 1 ?

1	2	3	4
2	4	6	8
5	10	15	20
-1	-2	-3	-4
-10	-20	-30	-40

Décomposition en valeurs singulières : principe

Qu'est-ce qu'une matrice de rang 1 ?

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
5	5	10	15	20
-1	-1	-2	-3	-4
-10	-10	-20	-30	-40

Décomposition en valeurs singulières : principe

Qu'est-ce qu'une matrice de rang 1 ?

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
2 & 2 & 4 & 6 & 8 \\
5 & 5 & 10 & 15 & 20 \\
-1 & -1 & -2 & -3 & -4 \\
-10 & -10 & -20 & -30 & -40
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{bmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 \\
2 & 4 & 6 & 8 \\
5 & 10 & 15 & 20 \\
-1 & -2 & -3 & -4 \\
-10 & -20 & -30 & -40
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \\ -10
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & 2 & 3 & 4
\end{bmatrix}
$$

Décomposition en valeurs singulières : principe

Qu'est-ce qu'une matrice de rang 1 ?

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 5 & 10 & 15 & 20 \\ -1 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ -10 & -10 & -20 & -30 & -40 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -10 & -20 & -30 & -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

5*4 = 20 valeurs 5+4 = 9 valeurs

Décomposition en valeurs singulières : principe

Toutes les matrices sont-elles de rang 1 ?

$$\begin{array}{|r|r|r|r|}\hline 2 & 4 & -1 & -5 \\ \hline -2 & -4 & 1 & 7 \\ \hline 1 & -2 & 0 & -4 \\ \hline 0 & -6 & 3 & 8 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ \hline \end{array} \; \begin{array}{|cccc|}\hline ? & ? & ? & ? \\ \hline \end{array}$$

Décomposition en valeurs singulières : principe

Toutes les matrices sont-elles de rang 1 ? **Non**, mais ...

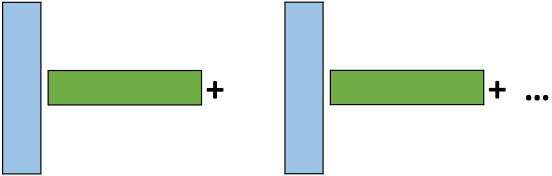
$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & -5 \\ -2 & -4 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

Décomposition en valeurs singulières : principe

Toutes les matrices sont-elles de rang 1 ? **Non**, mais ...elles peuvent toutes s'écrire comme une somme de matrices de rang 1

2	4	-1	-5
-2	-4	1	7
1	-2	0	-4
0	-6	3	8
1	0	0	-4

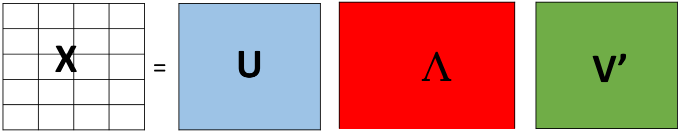
=



Décomposition en valeurs singulières : principe

La SVD d'une matrice $X_{(n,p)}$ donne les matrices $U_{(n,r)}$, $\Lambda_{(r,r)}$ et $V_{(p,r)}$ telles que :

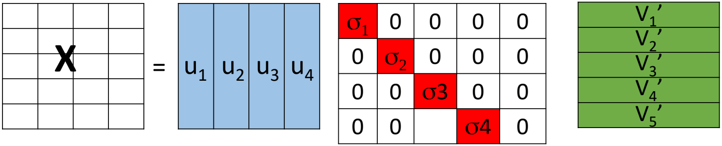
$$X = U\Lambda V' \quad \text{avec} \quad UU' = U'U = Id_n \quad \text{et} \quad VV' = V'V = Id_p$$



Décomposition en valeurs singulières : principe

La SVD d'une matrice $X_{(n,p)}$ donne les matrices $U_{(n,r)}$, $\Lambda_{(r,r)}$ et $V_{(p,r)}$ telles que :

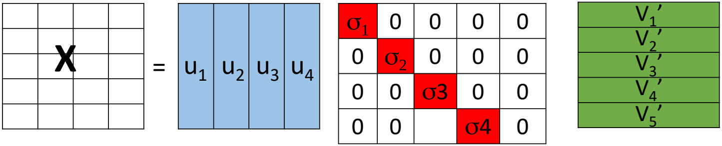
$$X = U\Lambda V' \quad \text{avec} \quad UU' = U'U = Id_n \quad \text{et} \quad VV' = V'V = Id_p$$

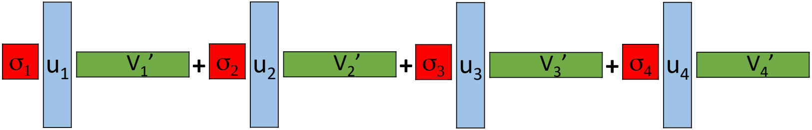


Décomposition en valeurs singulières : principe

La SVD d'une matrice $X_{(n,p)}$ donne les matrices $U_{(n,r)}$, $\Lambda_{(r,r)}$ et $V_{(p,r)}$ telles que :

$$X = U\Lambda V' \quad \text{avec} \quad UU' = U'U = Id_n \quad \text{et} \quad VV' = V'V = Id_p$$

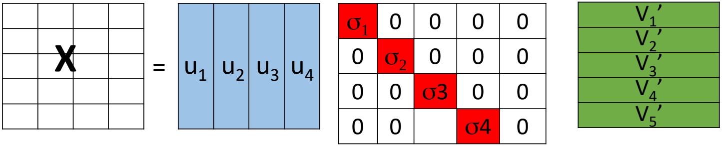


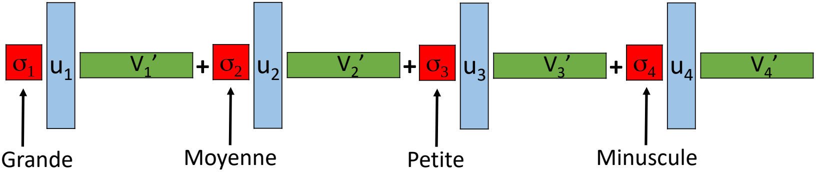


Décomposition en valeurs singulières : principe

La SVD d'une matrice $X_{(n,p)}$ donne les matrices $U_{(n,r)}$, $\Lambda_{(r,r)}$ et $V_{(p,r)}$ telles que :

$$X = U\Lambda V' \quad \text{avec} \quad UU' = U'U = Id_n \quad \text{et} \quad VV' = V'V = Id_p$$

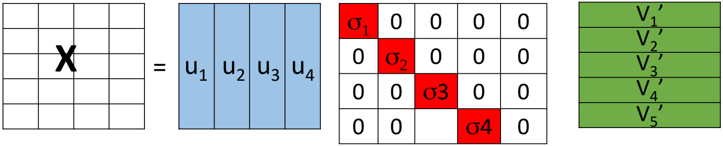


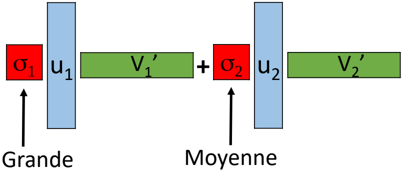


Décomposition en valeurs singulières : principe

La SVD d'une matrice $X_{(n,p)}$ donne les matrices $U_{(n,r)}$, $\Lambda_{(r,r)}$ et $V_{(p,r)}$ telles que :

$$X = U\Lambda V' \quad \text{avec} \quad UU' = U'U = Id_n \quad \text{et} \quad VV' = V'V = Id_p$$





Avec les 2 premières dimensions, on a une approximation de X de rang 2, avec $2 \times (n + 1 + p)$ valeurs au lieu de $n \times p$

Décomposition en valeurs singulières : exemple

2	4	-1	-5
-2	-4	1	7
1	-2	0	-4
0	-6	3	8
1	0	0	-4

Décomposition en valeurs singulières : exemple

2	4	-1	-5
-2	-4	1	7
1	-2	0	-4
0	-6	3	8
1	0	0	-4

=

-0,43	0,11	0,59	0,54
0,54	0,09	-0,40	0,41
-0,16	-0,80	-0,25	0,47
0,66	-0,35	0,65	-0,06
-0,23	-0,46	0,00	-0,56

15,4			
	4,7		
		2,1	
			0,36

-0,15	-0,49	0,19	0,84
-0,26	0,81	-0,23	0,48
0,82	0,27	0,45	0,20
0,48	-0,19	-0,84	0,17

Décomposition en valeurs singulières : exemple

$$
\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & -5 \\ -2 & -4 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -0{,}43 & 0{,}11 & 0{,}59 & 0{,}54 \\ 0{,}54 & 0{,}09 & -0{,}40 & 0{,}41 \\ -0{,}16 & -0{,}80 & -0{,}25 & 0{,}47 \\ 0{,}66 & -0{,}35 & 0{,}65 & -0{,}06 \\ -0{,}23 & -0{,}46 & 0{,}00 & -0{,}56 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 15{,}4 & & & \\ & 4{,}7 & & \\ & & 2{,}1 & \\ & & & 0{,}36 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -0{,}15 & -0{,}49 & 0{,}19 & 0{,}84 \\ -0{,}26 & 0{,}81 & -0{,}23 & 0{,}48 \\ 0{,}82 & 0{,}27 & 0{,}45 & 0{,}20 \\ 0{,}48 & -0{,}19 & -0{,}84 & 0{,}17 \end{bmatrix}
$$

$$
15{,}4 \begin{bmatrix} -0{,}43 \\ 0{,}54 \\ -0{,}16 \\ 0{,}66 \\ -0{,}23 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -0{,}15 & -0{,}49 & 0{,}19 & 0{,}84 \end{bmatrix}
$$

1.01	3.27	-1.28	-5.55
-1.26	-4.09	1.61	6.94
0.38	1.23	-0.48	-2.10
-1.55	-5.02	1.97	8.53
0.53	1.72	-0.67	-2.92

Approximation acceptable

Décomposition en valeurs singulières : exemple

2	4	-1	-5
-2	-4	1	7
1	-2	0	-4
0	-6	3	8
1	0	0	-4

=

-0,43	0,11	0,59	0,54
0,54	0,09	-0,40	0,41
-0,16	-0,80	-0,25	0,47
0,66	-0,35	0,65	-0,06
-0,23	-0,46	0,00	-0,56

15,4			
	4,7		
		2,1	
			0,36

-0,15	-0,49	0,19	0,84
-0,26	0,81	-0,23	0,48
0,82	0,27	0,45	0,20
0,48	-0,19	-0,84	0,17

$$15{,}4 \begin{pmatrix} -0{,}43 \\ 0{,}54 \\ -0{,}16 \\ 0{,}66 \\ -0{,}23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}15 & -0{,}49 & 0{,}19 & 0{,}84 \end{pmatrix} + 4{,}7 \begin{pmatrix} 0{,}11 \\ 0{,}09 \\ -0{,}80 \\ -0{,}35 \\ -0{,}46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}26 & 0{,}81 & -0{,}23 & 0{,}48 \end{pmatrix}$$

1.01	3.27	-1.28	-5.55
-1.26	-4.09	1.61	6.94
0.38	1.23	-0.48	-2.10
-1.55	-5.02	1.97	8.53
0.53	1.72	-0.67	-2.92

0.87	3.70	-1.41	-5.29
-1.37	-3.74	1.51	7.15
1.36	-1.82	0.38	-3.92
-1.12	-6.38	2.36	7.72
1.09	-0.04	-0.18	-3.97

Approximation bonne

Décomposition en valeurs singulières : exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -5 \\ -2 & -4 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}43 & 0{,}11 & 0{,}59 & 0{,}54 \\ 0{,}54 & 0{,}09 & -0{,}40 & 0{,}41 \\ -0{,}16 & -0{,}80 & -0{,}25 & 0{,}47 \\ 0{,}66 & -0{,}35 & 0{,}65 & -0{,}06 \\ -0{,}23 & -0{,}46 & 0{,}00 & -0{,}56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15{,}4 & & & \\ & 4{,}7 & & \\ & & 2{,}1 & \\ & & & 0{,}36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}15 & -0{,}49 & 0{,}19 & 0{,}84 \\ -0{,}26 & 0{,}81 & -0{,}23 & 0{,}48 \\ 0{,}82 & 0{,}27 & 0{,}45 & 0{,}20 \\ 0{,}48 & -0{,}19 & -0{,}84 & 0{,}17 \end{pmatrix}$$

$$15{,}4 \begin{pmatrix} -0{,}43 \\ 0{,}54 \\ -0{,}16 \\ 0{,}66 \\ -0{,}23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}15 & -0{,}49 & 0{,}19 & 0{,}84 \end{pmatrix} + 4{,}7 \begin{pmatrix} 0{,}11 \\ 0{,}09 \\ -0{,}80 \\ -0{,}35 \\ -0{,}46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}26 & 0{,}81 & -0{,}23 & 0{,}48 \end{pmatrix} + 2{,}1 \begin{pmatrix} 0{,}59 \\ -0{,}40 \\ -0{,}25 \\ 0{,}65 \\ 0{,}00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}82 & 0{,}27 & 0{,}45 & 0{,}20 \end{pmatrix}$$

1.01	3.27	-1.28	-5.55
-1.26	-4.09	1.61	6.94
0.38	1.23	-0.48	-2.10
-1.55	-5.02	1.97	8.53
0.53	1.72	-0.67	-2.92

0.87	3.70	-1.41	-5.29
-1.37	-3.74	1.51	7.15
1.36	-1.82	0.38	-3.92
-1.12	-6.38	2.36	7.72
1.09	-0.04	-0.18	-3.97

1.91	4.04	-0.84	-5.03
-2.07	-3.97	1.12	6.97
0.92	-1.97	0.14	-4.03
0.01	-6.00	2.98	8.00
1.10	-0.04	-0.17	-3.97

Approximation très bonne

Décomposition en valeurs singulières : exemple

2	4	-1	-5
-2	-4	1	7
1	-2	0	-4
0	-6	3	8
1	0	0	-4

=

-0,43	0,11	0,59	0,54
0,54	0,09	-0,40	0,41
-0,16	-0,80	-0,25	0,47
0,66	-0,35	0,65	-0,06
-0,23	-0,46	0,00	-0,56

15,4			
	4,7		
		2,1	
			0,36

-0,15	-0,49	0,19	0,84
-0,26	0,81	-0,23	0,48
0,82	0,27	0,45	0,20
0,48	-0,19	-0,84	0,17

$$15{,}4 \begin{pmatrix}-0{,}43\\0{,}54\\-0{,}16\\0{,}66\\-0{,}23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0{,}15 & -0{,}49 & 0{,}19 & 0{,}84\end{pmatrix} + 4{,}7 \begin{pmatrix}0{,}11\\0{,}09\\-0{,}80\\-0{,}35\\-0{,}46\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0{,}26 & 0{,}81 & -0{,}23 & 0{,}48\end{pmatrix} + 2{,}1 \begin{pmatrix}0{,}59\\-0{,}40\\-0{,}25\\0{,}65\\0{,}00\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}82 & 0{,}27 & 0{,}45 & 0{,}20\end{pmatrix} + 0{,}4 \begin{pmatrix}0{,}54\\0{,}41\\0{,}47\\-0{,}06\\-0{,}56\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}48 & -0{,}19 & -0{,}84 & 0{,}17\end{pmatrix}$$

1.01	3.27	-1.28	-5.55
-1.26	-4.09	1.61	6.94
0.38	1.23	-0.48	-2.10
-1.55	-5.02	1.97	8.53
0.53	1.72	-0.67	-2.92

0.87	3.70	-1.41	-5.29
-1.37	-3.74	1.51	7.15
1.36	-1.82	0.38	-3.92
-1.12	-6.38	2.36	7.72
1.09	-0.04	-0.18	-3.97

1.91	4.04	-0.84	-5.03
-2.07	-3.97	1.12	6.97
0.92	-1.97	0.14	-4.03
0.01	-6.00	2.98	8.00
1.10	-0.04	-0.17	-3.97

2	4	-1	-5
-2	-4	1	7
1	-2	0	-4
0	-6	3	8
1	0	0	-4

On retrouve X

Décomposition en valeurs singulières : calculs

Soit $X_{(n,p)}$ une matrice, comment faire la SVD de X, i.e. obtenir les matrices $U_{(n,r)}$, $\Lambda_{(r,r)}$ et $V_{(p,r)}$ telles que :

$$X = U\Lambda V' \quad \text{avec} \quad UU' = U'U = Id_n \quad \text{et} \quad VV' = V'V = Id_p$$

$X'X$ est la matrice des covariances (au n près)
XX' est la matrice des produits scalaires

Décomposition en valeurs singulières : calculs

Comment obtenir $U_{(n,r)}$, $\Lambda_{(r,r)}$ et $V_{(p,r)}$ telles que
$X = U\Lambda V'$ avec $UU' = U'U = Id_n$ et $VV' = V'V = Id_p$

Décomposition en valeurs singulières : calculs

Comment obtenir $U_{(n,r)}$, $\Lambda_{(r,r)}$ et $V_{(p,r)}$ telles que
$X = U\Lambda V'$ avec $UU' = U'U = Id_n$ et $VV' = V'V = Id_p$

$$X'X = (U\Lambda V')'(U\Lambda V') = (V\Lambda U')(U\Lambda V') = V\Lambda I_d \Lambda V' = V\Lambda^2 V'$$

Décomposition en valeurs singulières : calculs

Comment obtenir $U_{(n,r)}$, $\Lambda_{(r,r)}$ et $V_{(p,r)}$ telles que
$X = U\Lambda V'$ avec $UU' = U'U = Id_n$ et $VV' = V'V = Id_p$

$$X'X = (U\Lambda V')'(U\Lambda V') = (V\Lambda U')(U\Lambda V') = V\Lambda I_d \Lambda V' = V\Lambda^2 V'$$
$$\Rightarrow X'XV = V\Lambda^2 V'V = V\Lambda^2$$

Décomposition en valeurs singulières : calculs

Comment obtenir $U_{(n,r)}$, $\Lambda_{(r,r)}$ et $V_{(p,r)}$ telles que
$X = U\Lambda V'$ avec $UU' = U'U = Id_n$ et $VV' = V'V = Id_p$

$$X'X = (U\Lambda V')'(U\Lambda V') = (V\Lambda U')(U\Lambda V') = V\Lambda I_d \Lambda V' = V\Lambda^2 V'$$
$$\Rightarrow X'XV = V\Lambda^2 V'V = V\Lambda^2$$

$\Rightarrow$ Λ^2 valeurs propres et V vecteurs propres de la matrice de covariance X'X

Décomposition en valeurs singulières : calculs

Comment obtenir $U_{(n,r)}$, $\Lambda_{(r,r)}$ et $V_{(p,r)}$ telles que
$X = U\Lambda V'$ avec $UU' = U'U = Id_n$ et $VV' = V'V = Id_p$

$$X'X = (U\Lambda V')'(U\Lambda V') = (V\Lambda U')(U\Lambda V') = V\Lambda I_d \Lambda V' = V\Lambda^2 V'$$
$$\Rightarrow X'XV = V\Lambda^2 V'V = V\Lambda^2$$

$\Rightarrow \Lambda^2$ valeurs propres et V vecteurs propres de la matrice de covariance X'X

$$XX' = (U\Lambda V')(U\Lambda V')' = (U\Lambda V')(V\Lambda U') = U\Lambda I_d \Lambda U' = U\Lambda^2 U'$$

Décomposition en valeurs singulières : calculs

Comment obtenir $U_{(n,r)}$, $\Lambda_{(r,r)}$ et $V_{(p,r)}$ telles que
$X = U\Lambda V'$ avec $UU' = U'U = Id_n$ et $VV' = V'V = Id_p$

$$X'X = (U\Lambda V')'(U\Lambda V') = (V\Lambda U')(U\Lambda V') = V\Lambda I_d \Lambda V' = V\Lambda^2 V'$$
$$\Rightarrow X'XV = V\Lambda^2 V'V = V\Lambda^2$$

$\Rightarrow \Lambda^2$ valeurs propres et V vecteurs propres de la matrice de covariance X'X

$$XX' = (U\Lambda V')(U\Lambda V')' = (U\Lambda V')(V\Lambda U') = U\Lambda I_d \Lambda U' = U\Lambda^2 U'$$
$$\Rightarrow XX'U = U\Lambda^2 U'U = U\Lambda^2$$

Décomposition en valeurs singulières : calculs

Comment obtenir $U_{(n,r)}$, $\Lambda_{(r,r)}$ et $V_{(p,r)}$ telles que
$X = U\Lambda V'$ avec $UU' = U'U = Id_n$ et $VV' = V'V = Id_p$

$$X'X = (U\Lambda V')'(U\Lambda V') = (V\Lambda U')(U\Lambda V') = V\Lambda I_d \Lambda V' = V\Lambda^2 V'$$
$$\Rightarrow X'XV = V\Lambda^2 V'V = V\Lambda^2$$

$\Rightarrow \Lambda^2$ valeurs propres et V vecteurs propres de la matrice de covariance X'X

$$XX' = (U\Lambda V')(U\Lambda V')' = (U\Lambda V')(V\Lambda U') = U\Lambda I_d \Lambda U' = U\Lambda^2 U'$$
$$\Rightarrow XX'U = U\Lambda^2 U'U = U\Lambda^2$$

$\Rightarrow \Lambda^2$ valeurs propres et U vecteurs propres de la matrice des produits scalaires XX'

Décomposition en valeurs singulières : calculs

Comment obtenir $U_{(n,r)}$, $\Lambda_{(r,r)}$ et $V_{(p,r)}$ telles que
$X = U\Lambda V'$ avec $UU' = U'U = Id_n$ et $VV' = V'V = Id_p$

$$X'X = (U\Lambda V')'(U\Lambda V') = (V\Lambda U')(U\Lambda V') = V\Lambda I_d \Lambda V' = V\Lambda^2 V'$$
$$\Rightarrow X'XV = V\Lambda^2 V'V = V\Lambda^2$$

$\Rightarrow \Lambda^2$ valeurs propres et V vecteurs propres de la matrice de covariance X'X

$$XX' = (U\Lambda V')(U\Lambda V')' = (U\Lambda V')(V\Lambda U') = U\Lambda I_d \Lambda U' = U\Lambda^2 U'$$
$$\Rightarrow XX'U = U\Lambda^2 U'U = U\Lambda^2$$

$\Rightarrow \Lambda^2$ valeurs propres et U vecteurs propres de la matrice des produits scalaires XX'
Les valeurs singulières sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice de covariance (= valeurs propres de la matrice des produits scalaires)

Rappels d'analyse factorielle

1. Décomposition en valeurs singulières (SVD)

2. SVD et images

3. Lien SVD et ACP, AFC, ACM

Exercice : SVD et compression d'image

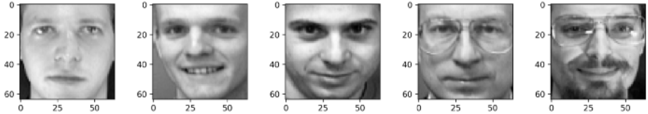
1. Importer l'image (Léna) et la transformer en matrice

```
library(raster)  # raster et rgdal à installer
photo <- raster("https://husson.github.io/img/Lena.png")
photo <- as.matrix(photo)
dim(photo)
```

2. Faire la SVD sur les données définissant cette image
3. Reconstruire l'image en utilisant la reconstruction de rang 5 (faire de même avec les rangs 20, 50 puis 100)
4. Pour chaque rang, donner le nombre de données qu'il est nécessaire de stocker (et le pourcentage de données par rapport au nombre de données de l'image originale)

SVD pour la reconnaissance faciale : eigenfaces

400 images de visages sur photo 64×64 pixels



Les images sont disponibles ici :

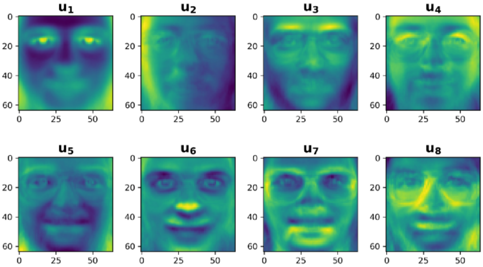
`https://github.com/lloydmeta/Olivetti-PNG/tree/master/images`

Transformation de chaque image en un vecteur de taille $64 \times 64 = 4096$

Création d'une matrice 4096×400 puis on fait la SVD

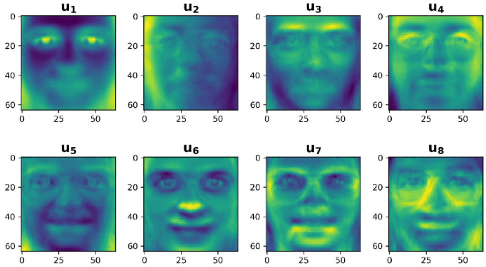
Reconnaissance faciale : eigenfaces

Voici les 8 premiers vecteurs propres mis sous forme d'image (les valeurs ne sont pas comprises entre 0 et 1)

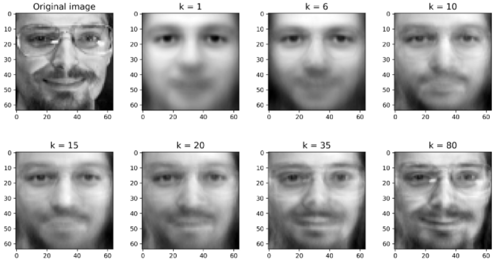


Reconnaissance faciale : eigenfaces

Voici les 8 premiers vecteurs propres mis sous forme d'image (les valeurs ne sont pas comprises entre 0 et 1)



On peut reconstruire une image :



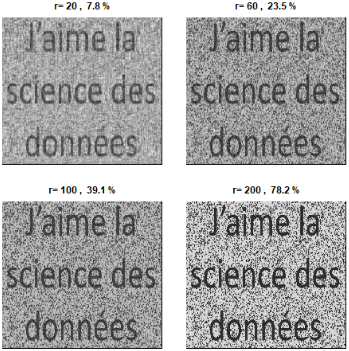
SVD pour le débruitage d'images

On peut débruiter cette image

SVD pour le débruitage d'images

On peut débruiter cette image

Reconstitution par SVD en ne conservant que les premières dimensions (ce qui revient à éliminer le bruit sur les dernières dimensions)



Rappels d'analyse factorielle

1. Décomposition en valeurs singulières (SVD)
2. SVD et images
3. Lien SVD et ACP, AFC, ACM

Lien SVD et ACP, AFC, ACM

- ACP est une SVD sur données centrées ou centrées-réduites si l'ACP est normée
  Plus précisément, avec $M = diag(\frac{1}{\sigma_1^2}, \frac{1}{\sigma_2^2}, \ldots \frac{1}{\sigma_p^2})$ et N la matrice diagonale des poids des lignes $(1/n)$, la SVD de $N^{1/2}XM^{1/2}$ donnent les résultats de l'ACP normée (i.e. les valeurs propres et vecteurs propres de $XMX'N$ et $X'NXM$)

- AFC est une SVD de la matrice $S = D_r^{-1/2}(P - rc')D_c^{-1/2}$ avec $P = X/n$, D_r et D_c les matrices diagonales des marges lignes et colonnes de P
  Les coordonnées des lignes sont : $F = D_r^{-1/2}U\Lambda$
  Les coordonnées des colonnes sont : $G = D_c^{-1/2}V\Lambda$
- ACM est une AFC sur le tableau disjonctif de X, et donc une SVD.

Fiche récapitulative de l'ACP

- Quels tableaux de données ? Quels objectifs ?
- Comment interpréter ?
- Comment considérer des individus supplémentaires, variables qualitatives, variables quantitatives supplémentaires ?
- Quelle différence entre ACP normée et non normée ?
- Dans un tableau avec 1 variable qualitative, les axes de l'ACP obtenus sur le tableau individus $\times$ variables quantitatives sont-ils identiques à ceux obtenus à partir des moyennes par modalité, moyennes pondérées par l'effectif de la modalité ? Donner un contre-exemple, expliciter les différences d'objectif OU démontrer l'égalité.

Fiche récapitulative sur l'AFC

- Quels types de tableaux de données ? Quels jeux de données ? Quels objectifs ?
- Comment interpréter ?
- Considérer le jeu de données Nobel avec le code suivant :

```
fichier <- "https://husson.github.io/MOOC_AnaDo/AnaDo_JeuDonnees_Nobel_avecMaths.csv"
Nobel <- read.table(fichier, header=TRUE, sep=";", row.names=1, check.names=FALSE)
Nobel <- Nobel[1:8,]
```

  Comparer les objectifs et les résultats de l'ACP et ceux de l'AFC sur ce jeu de données. Bien expliciter la différence.

Fiche récapitulative sur l'ACM

- Quels tableaux de données ? Quels objectifs ? Comment interpréter ?
- Prendre le jeu `tea` du package `FactoMineR` et faire l'ACM sur le tableau avec uniquement les variables 14 et 18. Puis faire l'AFC sur le tableau de contingence croisant ces 2 variables.

```
library(FactoMineR)
data(tea)
don <- tea[, c(14,18)]     ; MCA(don)
TabCont <- table(don)      ; CA(TabCont)
```

Comparer objectifs et résultats de l'ACM et l'AFC sur ce jeu de données. Expliciter les différences (dimensionalité et inertie notamment)