Analyse de variance avec interaction

F. Husson
husson@agrocampus-ouest.fr

Données - notations

Séance	Juge	Produit	Sucre	Acide	Amer	Cacao	Lait
S1	J1	P6	4	3	2	5.5	7.5
S1	J1	P4	1.2	4.4	6	7.6	5.5
S1	J1	P2	1.8	3	2.6	5	2.4
S1	J1	P5	1.5	3.5	7.1	7.5	7.3
S1	J1	P1	1	5.5	9.3	8.6	8.1
S1	J1	P3	9	1	0	0.5	3.7
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
S1	J2	P5	3.9	2	2.4	5.6	4.8
S1	J2	P6	2.4	4	4.9	5.3	5.8

Questions

Y a-t-il des différences d’amertume entre chocolats ?

Les juges utilisent-ils l’échelle de note de la même façon ?

L’amertume des chocolats est-elle évaluée de la même façon d’une séance à l’autre ?

Les juges évaluent-ils les chocolats de la même façon ?

Données - exemple

Exemple : 2 produits ; 3 juges; 2 répétitions

	Juge 1	Juge 2	Juge 3	Moy
Produit 1	1 3	1 1	2 4	2
Produit 2	2 2	4 6	4 6	4
Moy	2	3	4	3

Prod.	Juge	Note
P1	J1	1
P1	J1	3
P1	J2	1
P1	J2	1
P1	J3	2
P1	J3	4
…	…	…
P2	J3	6

Données - notations

- Y variable quantitative
- F1, F2, … variables qualitatives à *I*, *J*, … modalités
- n_{ij} répétitions pour le couple (*i,j*)

obs	F1	F2	y
1	1	1	y_{111}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$y_{11n_{11}}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	j	y_{ijk}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	I	J	$y_{IJn_{IJ}}$

$$y_{ij\bullet} = \frac{1}{n_{ij}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}$$

$$y_{i\bullet\bullet} = \frac{1}{n_i} \sum_{j,k} y_{ijk}$$

$$y_{\bullet j\bullet} = \frac{1}{n_j} \sum_{i,k} y_{ijk}$$

$$y_{\bullet\bullet\bullet} = \frac{1}{n} \sum_{i,j,k} y_{ijk}$$

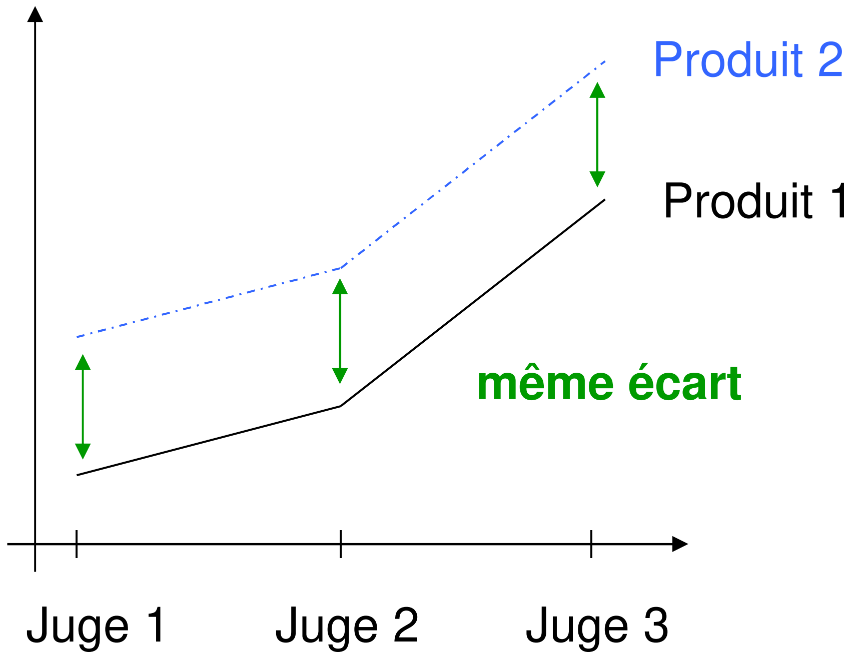
Questions

- Y a-t-il un effet « produit » sur la note ?
- Y a-t-il un effet « juge » sur la note ?
- Y a-t-il une interaction entre les deux facteurs ?

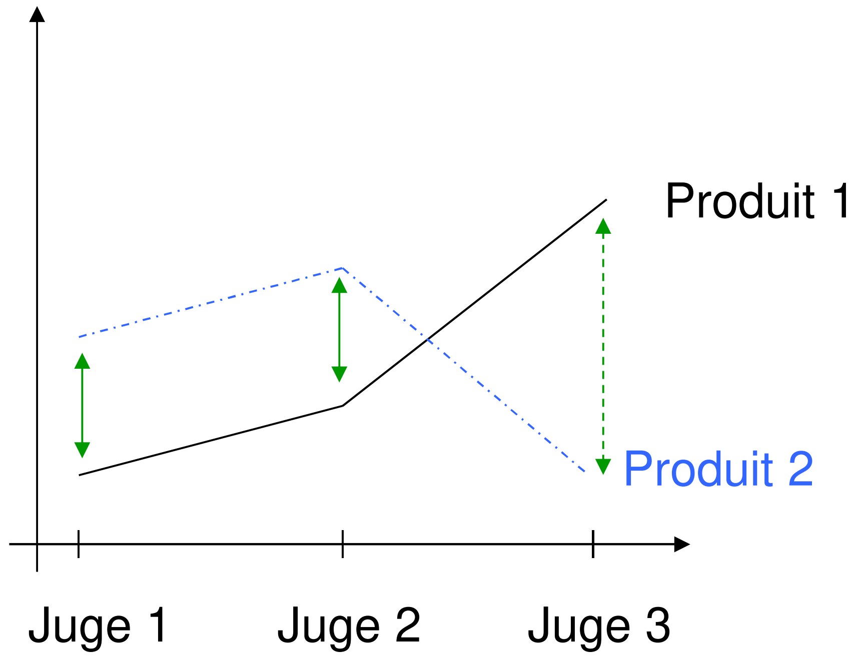
Tests

- Décision dans l'incertain : notion de test

Définition de l'interaction



Les effets produit et juge s'additionnent



Les effets produit et juge ne s'additionnent pas : interaction entre ces 2 facteurs

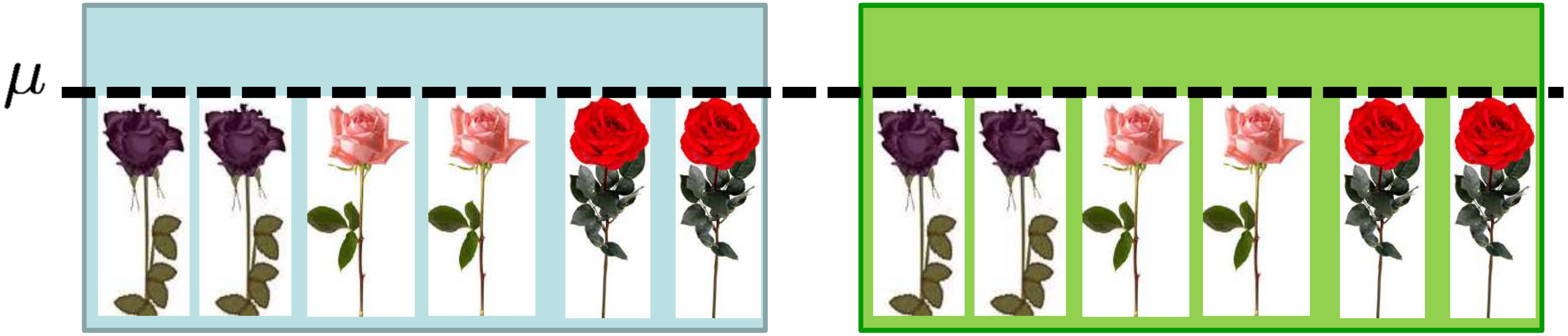
Interaction :

l'effet d'un facteur sur Y diffère selon les modalités de l'autre

Exemple : 2 parcelles, 3 variétés de rose

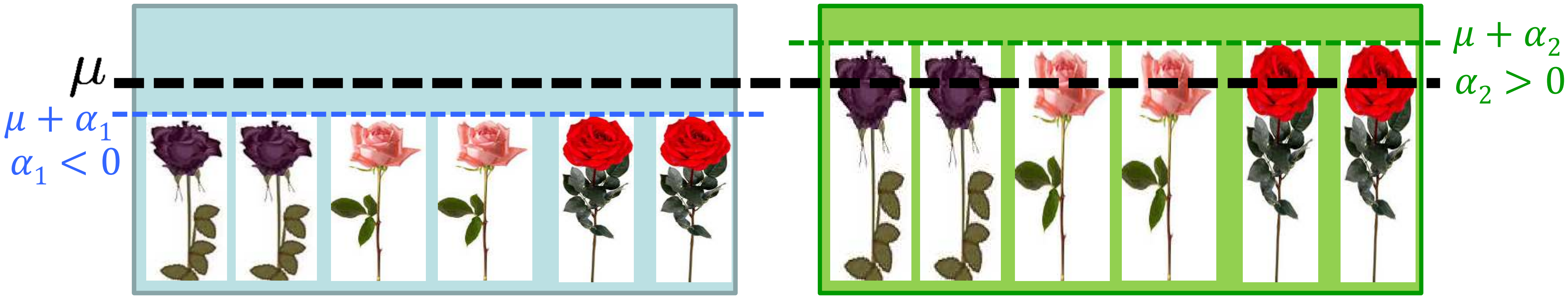
i=1,..,2 *j=1,…,3* *k=1,2*

$$\forall i, j, k \qquad Y_{ijk} = \mu$$



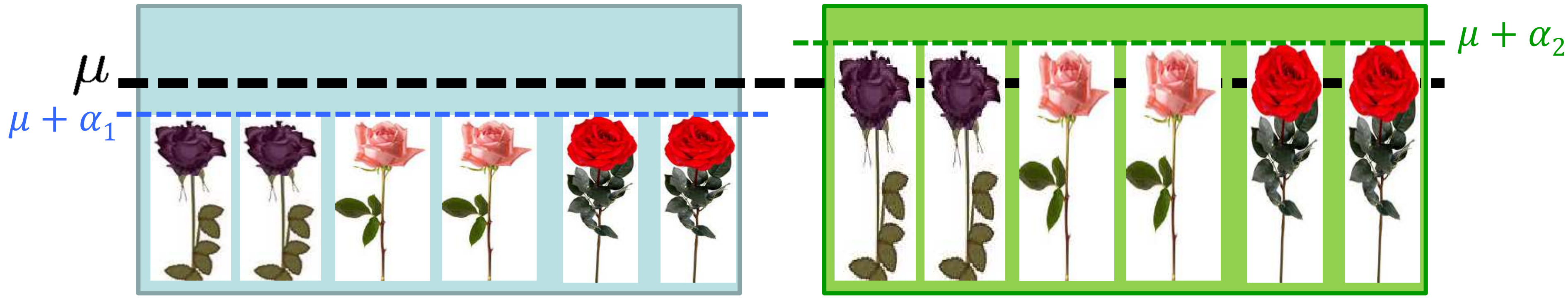
$$\forall i, j, k \qquad Y_{ijk} = \mu + \alpha_i$$

Effet parcelle



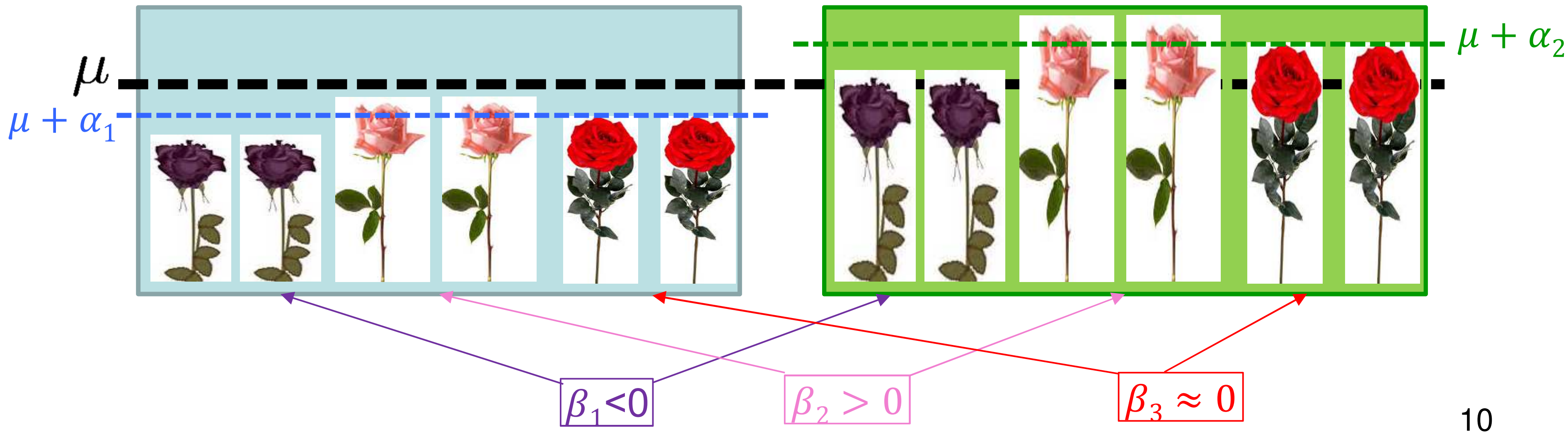
Exemple : 2 parcelles, 3 variétés de rose

$$\forall i, j, k \qquad Y_{ijk} = \mu + \alpha_i$$



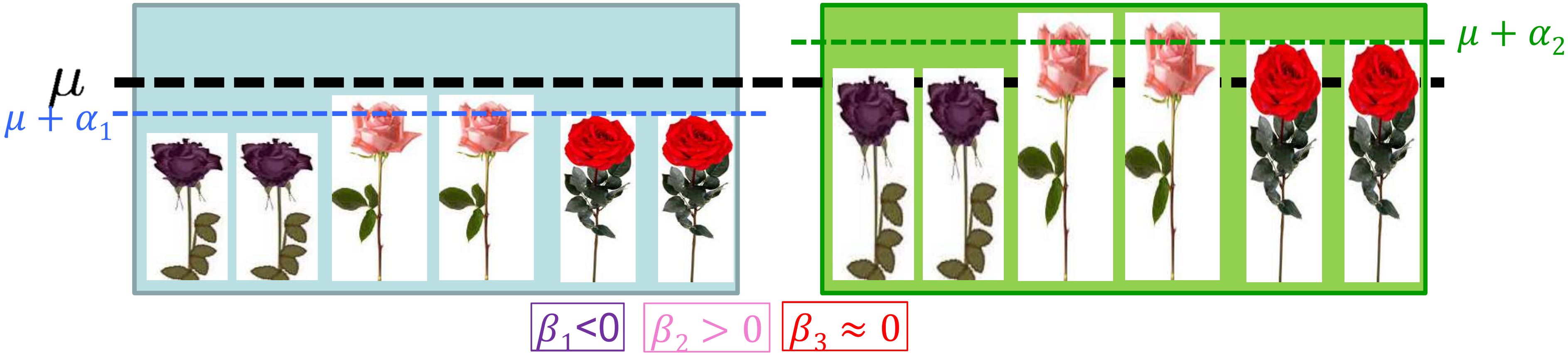
$$\forall i, j, k \qquad Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

Effet variété

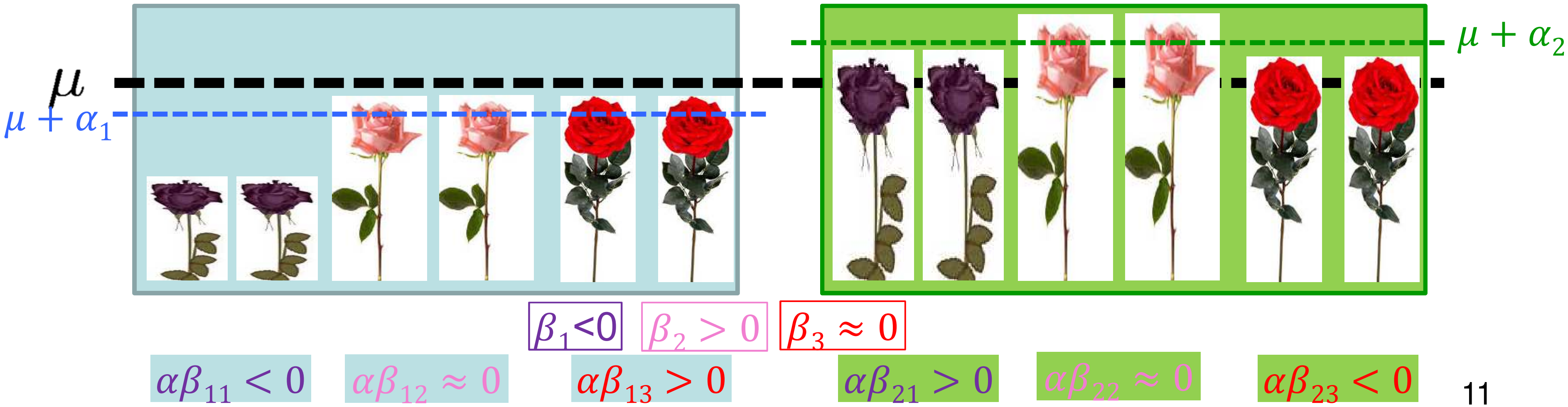


Exemple : 2 parcelles, 3 variétés de rose

$$\forall i, j, k \qquad Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

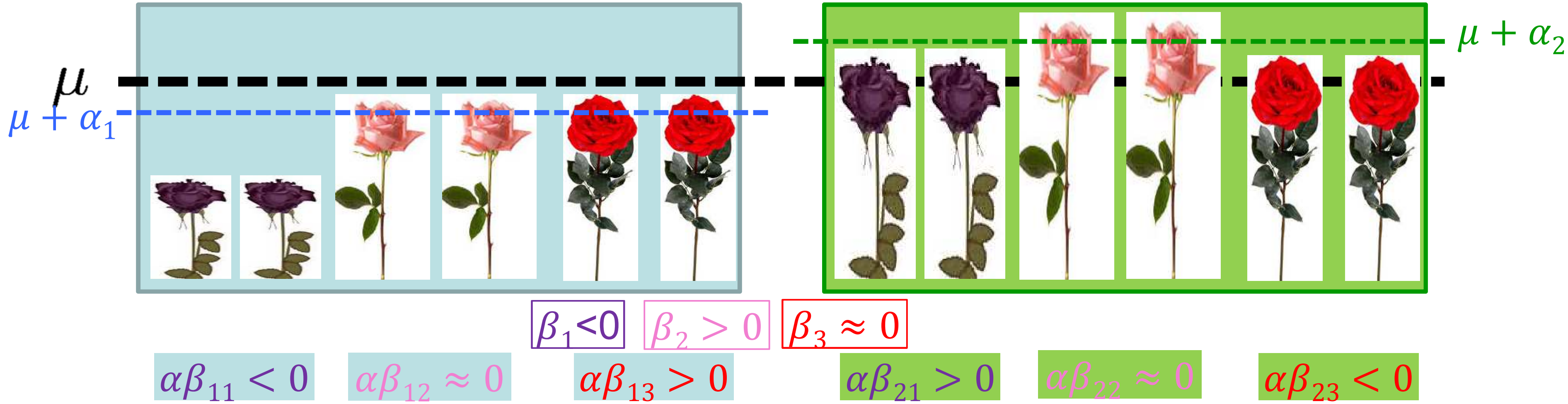


$$\forall i, j, k \qquad Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$$ Interaction

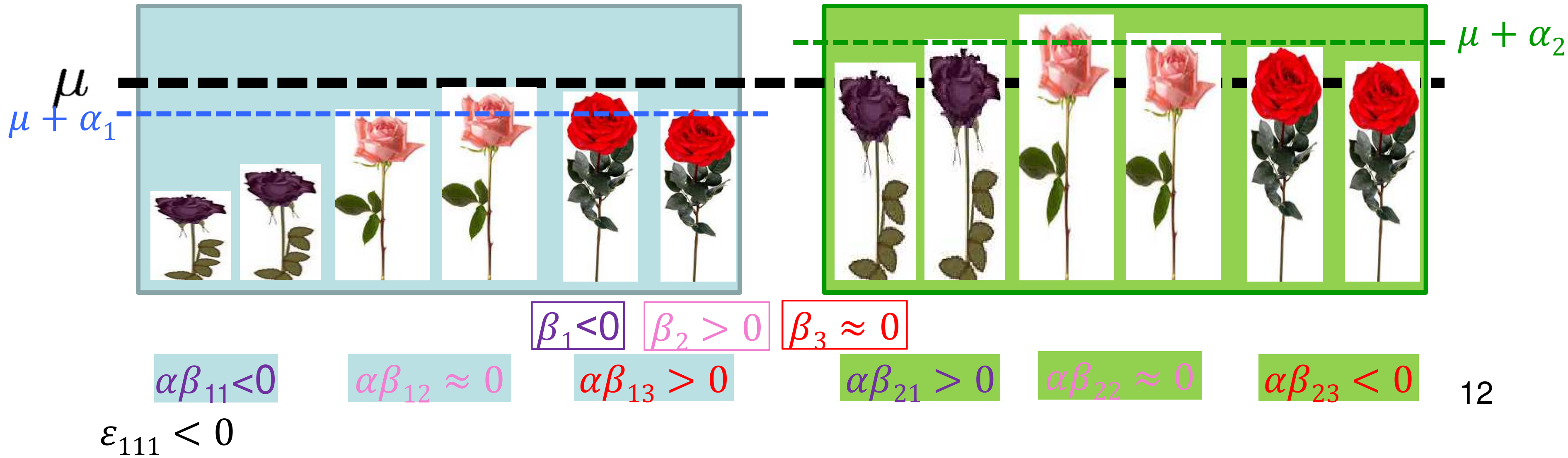


Exemple : 2 parcelles, 3 variétés de rose

$$\forall i, j, k \qquad Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$$

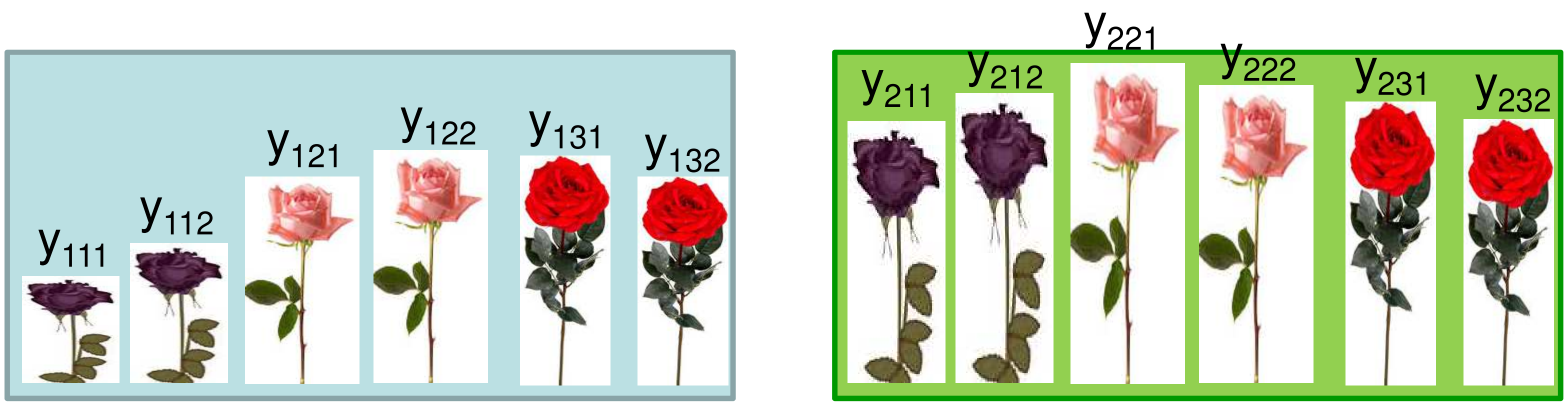


$$\forall i, j, k \qquad Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$



Exemple : 2 parcelles, 3 variétés de rose

On ne dispose que de l’info suivante : la taille de chaque fleur, sa variété et la parcelle dans laquelle elle est cultivée



Et on cherche à estimer :

μ : la taille moyenne des fleurs (quelle que soit la parcelle et la variété)

α_i : l’effet de la parcelle *i*

β_j : l’effet de la variété *j*

$\alpha\beta_{ij}$: l’effet de l’interaction variété - parcelle

Définition du modèle à 2 facteurs

Écriture du modèle sous forme indicée

$$
\begin{cases}
\forall i,j,k \quad Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \\
\forall i,j,k \quad \mathcal{L}(\varepsilon_{ijk}) = \mathcal{N}(0,\sigma) \\
\forall (i',j',k') \neq (i,j,k) \quad cov(\varepsilon_{ijk}, \varepsilon_{i'j'k'}) = 0
\end{cases}
$$

μ	effet moyen
α_i	effet principal du niveau *i* du facteur 1
β_j	effet principal du niveau *j* du facteur 2
$\alpha\beta_{ij}$	effet de l'interaction des facteurs 1 et 2 pour les niveaux *i* et *j*
ε_{ijk}	résiduelle

Écriture matricielle du modèle :

$$Y = X\beta + E \quad \text{avec } \mathbb{E}(E) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(E) = \sigma^2 \, Id$$

$$
\begin{aligned}
Y_{111} &= \mu + \alpha_1 + \beta_1 + \alpha\beta_{11} + \varepsilon_{111}\\
Y_{112} &= \mu + \alpha_1 + \beta_1 + \alpha\beta_{11} + \varepsilon_{112}\\
Y_{121} &= \mu + \alpha_1 + \beta_2 + \alpha\beta_{12} + \varepsilon_{121}\\
Y_{122} &= \mu + \alpha_1 + \beta_2 + \alpha\beta_{12} + \varepsilon_{122}\\
Y_{131} &= \mu + \alpha_1 + \beta_3 + \alpha\beta_{13} + \varepsilon_{131}\\
Y_{132} &= \mu + \alpha_1 + \beta_3 + \alpha\beta_{13} + \varepsilon_{132}\\
Y_{211} &= \mu + \alpha_2 + \beta_1 + \alpha\beta_{21} + \varepsilon_{211}\\
Y_{212} &= \mu + \alpha_2 + \beta_1 + \alpha\beta_{21} + \varepsilon_{212}\\
Y_{221} &= \mu + \alpha_2 + \beta_2 + \alpha\beta_{22} + \varepsilon_{221}\\
Y_{222} &= \mu + \alpha_2 + \beta_2 + \alpha\beta_{22} + \varepsilon_{222}\\
Y_{231} &= \mu + \alpha_2 + \beta_3 + \alpha\beta_{23} + \varepsilon_{231}\\
Y_{232} &= \mu + \alpha_2 + \beta_3 + \alpha\beta_{23} + \varepsilon_{232}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} y_{111}\\ y_{112}\\ y_{121}\\ y_{122}\\ y_{131}\\ y_{132}\\ y_{211}\\ y_{212}\\ y_{221}\\ y_{222}\\ y_{231}\\ y_{232} \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{c|cc|ccc|cccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} \mu\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \alpha\beta_{11}\\ \alpha\beta_{12}\\ \alpha\beta_{13}\\ \alpha\beta_{21}\\ \alpha\beta_{22}\\ \alpha\beta_{23} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \varepsilon_{111}\\ \varepsilon_{112}\\ \varepsilon_{121}\\ \varepsilon_{122}\\ \varepsilon_{131}\\ \varepsilon_{132}\\ \varepsilon_{211}\\ \varepsilon_{212}\\ \varepsilon_{221}\\ \varepsilon_{222}\\ \varepsilon_{231}\\ \varepsilon_{232} \end{bmatrix}
$$

Contraintes

1 + I + J + IJ paramètres mais IJ paramètres indépendants

modèle sur-paramétré $\Longrightarrow$ besoin de contraintes

Contraintes :

$\alpha_1 = 0$ La modalité 1 du 1er facteur sert de référence

$\beta_1 = 0$ La modalité 1 du 2ème facteur sert de référence

$$\begin{cases} \forall\, i, \alpha\beta_{i1} = 0 \\ \forall\, j, \alpha\beta_{1j} = 0 \end{cases}$$

Les interactions avec les modalités 1 du 1er et du 2ème facteur servent de référence

Il est extrêmement difficile d'interpréter les coefficients estimés avec ces contraintes pour des modèles avec interactions (l'interprétation d'un coefficient dépend du modèle)
ATTENTION : ces contraintes sont utilisées par défaut dans R
➔ ne pas utiliser les fonctions par défaut

Contraintes

1 + I + J + IJ paramètres mais IJ paramètres indépendants

modèle sur-paramétré $\Longrightarrow$ besoin de contraintes

Contraintes :

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0$$

$$\sum_{j=1}^{J} \beta_j = 0$$

$$\forall i, \sum_{j=1}^{J} \alpha\beta_{ij} = 0$$

$$\forall j, \sum_{i=1}^{I} \alpha\beta_{ij} = 0$$

Exemple :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0 \Rightarrow \beta_3 = -\beta_1 - \beta_2$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc}
\alpha\beta_{11} & + & \alpha\beta_{12} & + & \alpha\beta_{13} & = 0 \\
+ & & + & & + & \\
\alpha\beta_{21} & + & \alpha\beta_{22} & + & \alpha\beta_{23} & = 0 \\
= & & = & & = & \\
0 & & 0 & & 0 &
\end{array}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha\beta_{13} = -\alpha\beta_{11} - \alpha\beta_{12} \\ \alpha\beta_{21} = -\alpha\beta_{11} \\ \alpha\beta_{22} = -\alpha\beta_{12} \\ \alpha\beta_{23} = -\alpha\beta_{21} - \alpha\beta_{22} \\ \Longrightarrow \quad \alpha\beta_{23} = \alpha\beta_{11} + \alpha\beta_{12} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
Y_{111} &= \mu + \alpha_1 + \beta_1 + \alpha\beta_{11} + \varepsilon_{111} \\
Y_{112} &= \mu + \alpha_1 + \beta_1 + \alpha\beta_{11} + \varepsilon_{112} \\
Y_{121} &= \mu + \alpha_1 + \beta_2 + \alpha\beta_{12} + \varepsilon_{121} \\
Y_{122} &= \mu + \alpha_1 + \beta_2 + \alpha\beta_{12} + \varepsilon_{122} \\
Y_{131} &= \mu + \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 - \alpha\beta_{11} - \alpha\beta 12 + \varepsilon_{131} \\
Y_{132} &= \mu + \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 - \alpha\beta_{11} - \alpha\beta 12 + \varepsilon_{132} \\
Y_{211} &= \mu - \alpha_1 + \beta_1 - \alpha\beta_{11} + \varepsilon_{211} \\
Y_{212} &= \mu - \alpha_1 + \beta_1 - \alpha\beta_{11} + \varepsilon_{212} \\
Y_{221} &= \mu - \alpha_1 + \beta_2 - \alpha\beta_{12} + \varepsilon_{221} \\
Y_{222} &= \mu - \alpha_1 + \beta_2 - \alpha\beta_{12} + \varepsilon_{222} \\
Y_{231} &= \mu - \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 + \alpha\beta_{11} + \alpha\beta 12 + \varepsilon_{231} \\
Y_{232} &= \mu - \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 + \alpha\beta_{11} + \alpha\beta 12 + \varepsilon_{232}
\end{aligned}
$$

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1$$

$$\sum_{j=1}^{J} \beta_j = 0 \Rightarrow \beta_3 = -\beta_1 - \beta_2$$

$$\forall i, \sum_{j=1}^{J} \alpha\beta_{ij} = 0$$

$$\forall j, \sum_{i=1}^{I} \alpha\beta_{ij} = 0$$

$$
\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ y_{131} \\ y_{132} \\ y_{211} \\ y_{212} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{231} \\ y_{232} \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{c|c|cc|cc}
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \alpha\beta_{11} \\ \alpha\beta_{12} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{131} \\ \varepsilon_{132} \\ \varepsilon_{211} \\ \varepsilon_{212} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{222} \\ \varepsilon_{231} \\ \varepsilon_{232} \end{bmatrix}
$$

Estimation des paramètres du modèle

par la méthode des moindres carrés

Minimiser $\sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}^2$ revient à minimiser $E^2 = (Y - X\beta)'(Y - X\beta)$

$$E^2 = Y'Y - Y'X\beta - \beta'X'Y + \beta'X'X\beta$$

Annulons la dérivée par rapport à β pour trouver le minimum

$$\frac{\partial(E^2)}{\partial\beta} = \frac{\partial(Y'Y)}{\partial\beta} - \frac{\partial(Y'X\beta)}{\partial\beta} - \frac{\partial(\beta'X'Y)}{\partial\beta} + \frac{\partial(\beta'X'X\beta)}{\partial\beta} = 0$$

$$0 \quad - (X'Y) \quad - (X'Y) + X'X\beta + X'X\beta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{X'Y = X'X\beta}$$

Règles de calcul pour dérivation matricielle

$$\frac{\partial(X'A)}{\partial A} = \frac{\partial(A'X)}{\partial A} = X$$

$$\frac{\partial(A'X')}{\partial A} = \frac{\partial(AX)}{\partial A} = X'$$

X'X non inversible : sur-paramétrisation (besoin de contraintes)

X'X inversible : l'estimateur de β est : $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$

Propriétés : $\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \beta \qquad \mathbb{V}(\hat{\beta}) = \sigma^2\,(X'X)^{-1}$

$$\hat{\beta} - \beta \sim N(0, \sigma^2\,(X'X)^{-1})$$

Estimation des paramètres du modèle

Prédiction et résidus

Valeurs prédites : $\widehat{Y} = X\widehat{\beta}$

$$\widehat{y}_{ijk} = \widehat{\mu} + \widehat{\alpha}_i + \widehat{\beta}_j + \widehat{\alpha\beta}_{ij} = y_{ij\bullet}$$

Résidus : $E = Y - \widehat{Y}$

$$e_{ijk} = y_{ijk} - \widehat{y}_{ijk}$$

Estimateur de la variabilité résiduelle

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i,j,k} e_{ijk}^2}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Propriété : $\mathbb{E}(\widehat{\sigma}^2) = \sigma^2$

Estimation des paramètres du modèle

Cas particulier du plan équilibré (complet équirépété) :

$$\widehat{\mu} = y_{\bullet\bullet\bullet}$$

$$\widehat{\alpha}_i = y_{i\bullet\bullet} - y_{\bullet\bullet\bullet}$$

$$\widehat{\beta}_j = y_{\bullet j\bullet} - y_{\bullet\bullet\bullet}$$

$$\widehat{\alpha\beta}_{ij} = y_{ij\bullet} - y_{i\bullet\bullet} - y_{\bullet j\bullet} + y_{\bullet\bullet\bullet}$$

Décomposition de la variabilité

Cas complet et équirépété : les SC s'additionnent

$$\sum_{i,j,k}(Y_{ijk} - Y_{\bullet\bullet\bullet})^2 = \sum_{i,j,k}(Y_{i\bullet\bullet} - Y_{\bullet\bullet\bullet})^2$$ *I-1*

n-1

$$+ \sum_{i,j,k}(Y_{\bullet j\bullet} - Y_{\bullet\bullet\bullet})^2$$ *J-1*

$$+ \sum_{i,j,k}(Y_{ij\bullet} - Y_{i\bullet\bullet} - Y_{\bullet j\bullet} + Y_{\bullet\bullet\bullet})^2$$ *(I-1)(J-1)*

$$+ \sum_{i,j,k}(Y_{ijk} - Y_{ij\bullet})^2$$ *ddl_R*

$$SC_T = SC_A + SC_B + SC_{AB} + SC_R$$

Test global d'un effet

Test du facteur A :

Hypothèses : $H_0 \,:\, \forall i,\ \alpha_i = 0$ $\quad H_1 \,:\, \exists i \;/\; \alpha_i \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(CM_A) &= \sigma^2 + \frac{KJ}{I-1}\sum_i \alpha_i^2 \\
\mathbb{E}(CM_B) &= \sigma^2 + \frac{KI}{J-1}\sum_j \beta_j^2 \\
\mathbb{E}(CM_{AB}) &= \sigma^2 + \frac{K}{(I-1)(J-1)}\sum_{ij} \alpha\beta_{ij}^2 \\
\mathbb{E}(CM_R) &= \sigma^2
\end{aligned}
$$

Idée : ....

Test global d'un effet

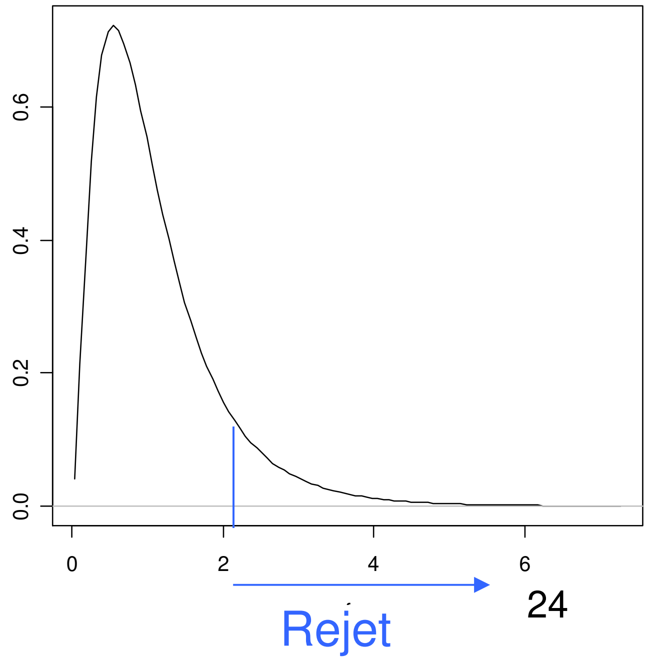
Test du facteur A :

Hypothèses : $H_0 : \forall i,\ \alpha_i = 0$ $\qquad H_1 : \exists i \ / \ \alpha_i \neq 0$

Statistique de test : $F_{obs} = \dfrac{SC_A/(I-1)}{SC_R/ddl_R} = \dfrac{CM_A}{CM_R}$

Si $\forall i\ \alpha_i = 0 \quad F_{obs} \sim F^{I-1}_{ddl_R}$

$F_{obs} > F^{I-1}_{ddl_R}(0.95) \Longrightarrow$ rejet de H_0



Test global d'un effet

Test de l'interaction AB :

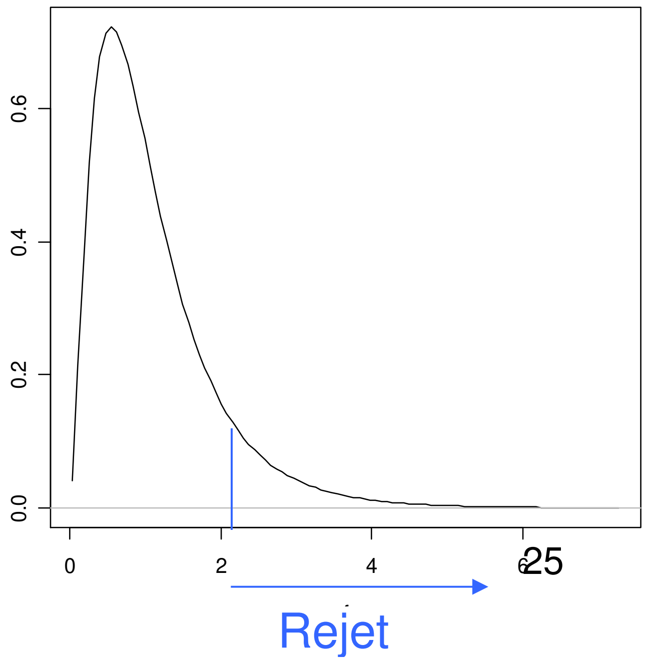
Hypothèses : $H_0 \ : \ \forall (i,j), \ \ \alpha\beta_{ij} = 0 \qquad H_1 \ : \ \exists (i,j) \ / \ \alpha\beta_{ij} \neq 0$

Statistique de test :

$$F_{obs} = \frac{\frac{SC_{AB}}{(I-1)(J-1)}}{\frac{SC_R}{ddl_R}} = \frac{CM_{AB}}{CM_R}$$

Si $\forall (i,j) \ \alpha\beta_{ij} = 0 \qquad F_{obs} \sim F_{ddl_R}^{(I-1)(J-1)}$

$F_{obs} > F_{ddl_R}^{(I-1)(J-1)}(0.95) \Longrightarrow$ rejet de H_0



Test de conformité d'un coefficient

Hypothèses : $H_0 : \alpha_i = 0 \qquad H_1 : \alpha_i \neq 0$

On sait que : $\mathcal{L}(\widehat{\alpha}_i) = \mathcal{N}(\alpha_i, \sigma_{\widehat{\alpha}_i})$ avec $\sigma^2_{\widehat{\alpha}_i} = \sigma^2 \left[(X'X)^{-1})\right]_{ii}$

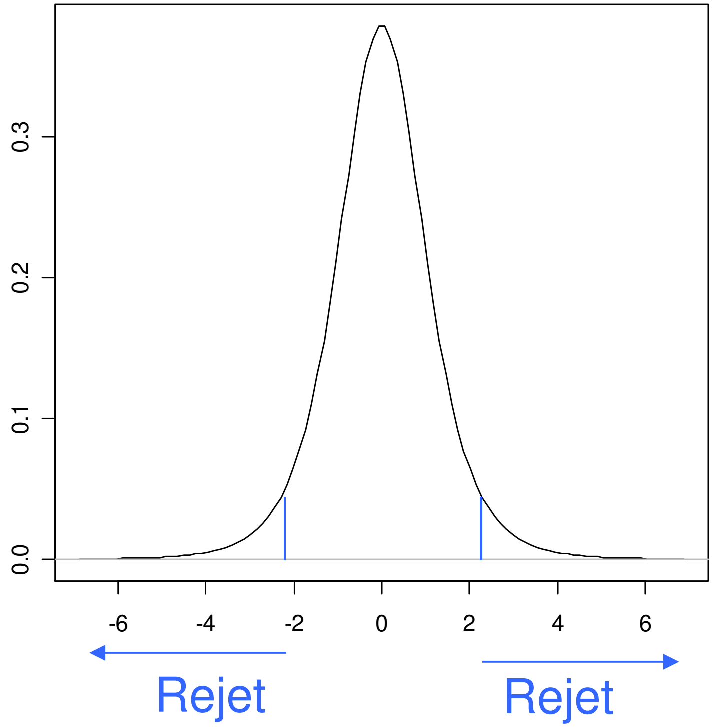
d'où : $\dfrac{\widehat{\alpha}_i - \alpha_i}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\alpha}_i}} \sim \mathcal{T}_{\nu = ddl_R}$

Statistique de test : $T_{obs} = \dfrac{\widehat{\alpha}_i}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\alpha}_i}}$

Si $\alpha_i = 0, \quad T_{obs} \sim \mathcal{T}_{\nu = ddl_R}$

Décision : si $|T_{obs}| > t_{\nu = ddl_R}(0.975)$

rejet de H_0



Intervalle de confiance :

$$\alpha_i \in \left[\widehat{\alpha}_i - \widehat{\sigma}_{\widehat{\alpha}_i}\; t_{ddl_R}(0.975) \;;\; \widehat{\alpha}_i + \widehat{\sigma}_{\widehat{\alpha}_i}\; t_{ddl_R}(0.975)\right]$$

Exemple

```
library(FactoMineR)
AovSum(Note ~ Produit+Juge+Produit:Juge,data=donnees)
```

Prod	Juge	Note
P1	J1	1
P1	J1	3
P1	J2	1
P1	J2	1
P1	J3	2
P1	J3	4
P2	J1	2
P2	J1	2
P2	J2	4
P2	J2	6
P2	J3	4
P2	J3	6

```
$Ftest        Sum Sq Df      CM F value  Pr(>F)
Prod         12.0000  1 12.0000      9 0.02401 *
Juge          8.0000  2  4.0000      3 0.12500
Prod:Juge     8.0000  2  4.0000      3 0.12500
Residuals     8.0000  6  1.3333
---
$Ttest                Estimate Std.Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)                3.0     0.333   9.0      0.000
Prod - P1                 -1.0     0.333 -3.0      0.024
Prod - P2                  1.0     0.333  3.0      0.024
Juge - J1                  0.0     0.471 -2.121    0.078
Juge - J2                  0.0     0.471  0.0      1.000
Juge - J3                  1.0     0.471  2.121    0.078
Prod-P1 : Juge-J1          1.0     0.471  2.121    0.078
Prod-P2 : Juge-J1         -1.0     0.471 -2.121    0.078
Prod-P1 : Juge-J2         -1.0     0.471 -2.121    0.078
Prod-P2 : Juge-J2          1.0     0.471  2.121    0.078
Prod-P1 : Juge-J3          0.0     0.471  0.0      1.000
Prod-P2 : Juge-J3          0.0     0.471  0.0      1.000
```

Extension de l'analyse de variance

Généralisation immédiate à un nombre quelconque de facteurs

Si les données sont déséquilibrées :

- $\widehat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$
- les SC ne s'additionnent plus
- $\widehat{\alpha}_i$ et $\widehat{\beta}_j$ dépendent du modèle

Modèle linéaire
Contextes d'application

Modèle de régression

- Sources de variabilité quantitatives

Modèle d'analyse de la variance

- Sources de variabilité qualitatives

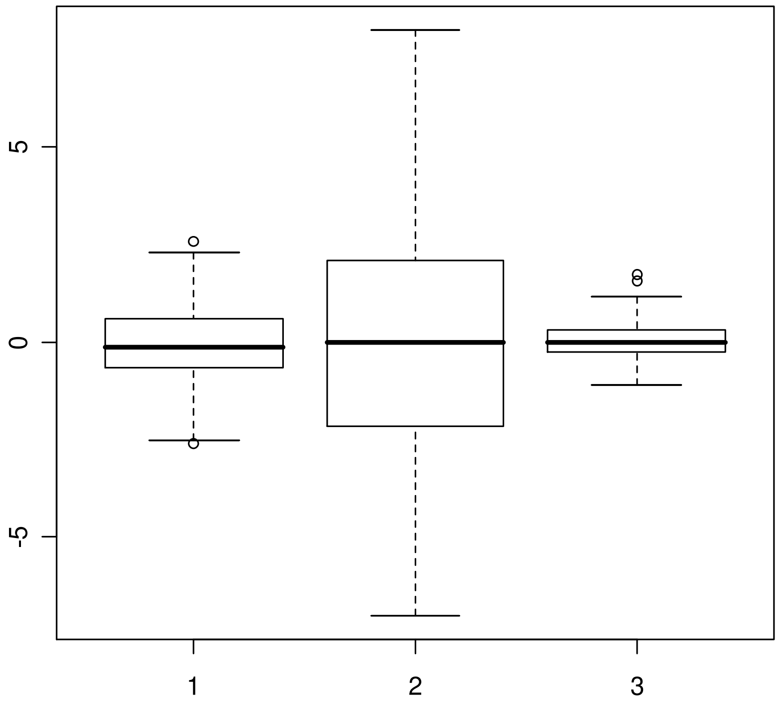
Modèle d'analyse de covariance

- Sources de variabilité de natures différentes

Tous ces modèles sont des modèles linéaires

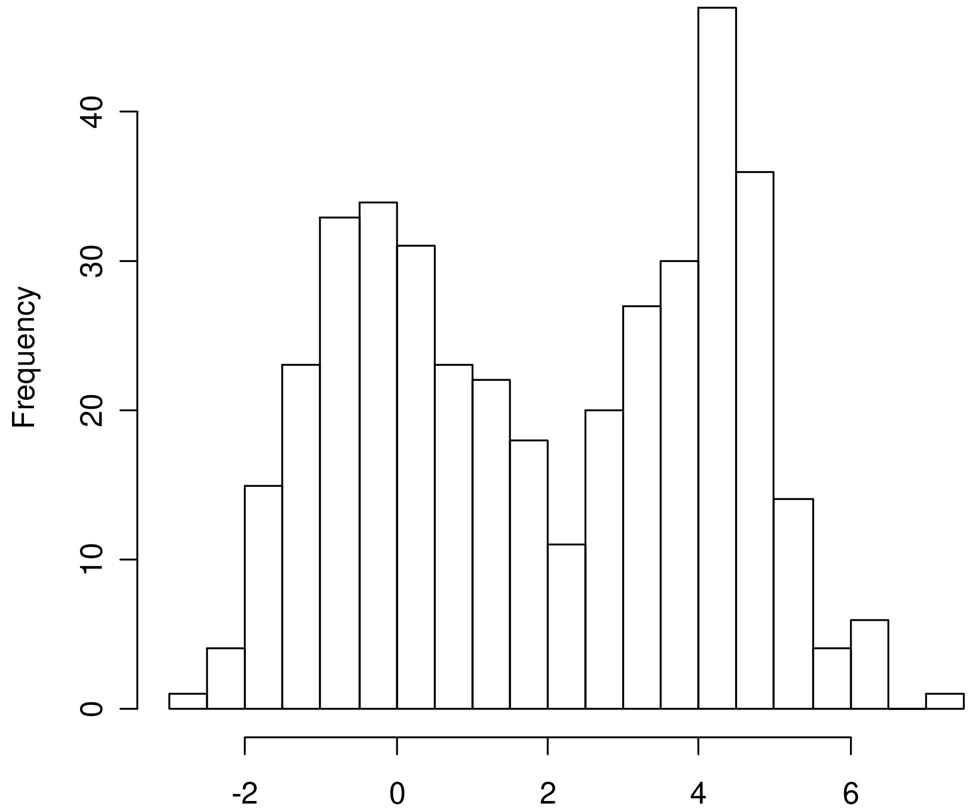
Analyse des **résidus**

Homoscédasticité des **résidus** ?



Test Bartlett

Normalité des **résidus** ?



Tests Shapiro-Wilks, Kolmogorov, χ^2