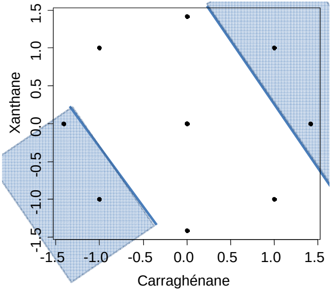
# Plans optimaux

- 1 facteur à 2 modalités, 2 facteurs à 3 et 2 facteurs à 4 :
  $n_{max} = 288$, $PPCM(6, 8, 9, 16, 12) = 144$
  Trade of / analyse conjointe en marketing : 16 essais possibles
  On perd l'orthogonalité mais comment prévoir avec le plus de précision ?

- $Y$ viscosité
  $x_1$ teneur en carraghénane
  $x_2$ teneur en xanthane
  Pour certaines recettes la viscosité sera trop forte (ou trop faibles)
  $\Rightarrow$ impossible de faire ces recettes



# Plans optimaux : les critères

$$\mathbb{V}(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

$\Longrightarrow$ Minimiser $(X'X)^{-1}$ : problème, il faudrait un seul critère

- $(X'X)$ matrice d'information
- $(X'X)^{-1}$ matrice de dispersion

Trois critères :

- $D$-optimalité : minimise le déterminant de la matrice de dispersion $\Leftrightarrow$ maximise la matrice d'information
- $A$-optimalité : minimiser la moyenne de la variance des coefficients de la matrice de dispersion
- $G$-optimalité : trouver les expériences qui prévoient avec le plus de précision $\Rightarrow$ minimiser la variance de prédiction

Le critère de $D$-optimalité est plus rapide à calculer

# Plans optimaux : algorithme d'échange

Algorithme d'échange de Fedorov :

1. définir un grand nombre d'expériences potentielles $N$
2. définir le nombre d'essais à réaliser $n$
3. tirer au hasard $n$ expériences parmi les $N$
4. calculer le critère choisi : $\det(X'X)$ par exemple
5. sortir au hasard 1 des $n$ expériences du plan et en ajouter 1 des $N - n$ (au hasard)
6. si le déterminant augmente, conserver cet échange, sinon annuler l'échange
7. itérer les étapes 5 et 6 jusqu'à convergence

# Plans optimaux : avantages /inconvénients

Avantages :

- plans très flexibles par rapport au nombre d'essais
- on peut imposer certains essais
- on peut rajouter des expériences au cours du plan

Inconvénients :

- fournit toujours un plan, sans garantie sur sa qualité $\Rightarrow$ toujours vérifier la qualité
- la convergence vers l'optimum global n'est pas assurée $\Rightarrow$ relancer plusieurs fois l'algorithme

# Construction de plans optimaux avec R

```
# EXEMPLE 1: modèle quadratique avec 3 variables
library(AlgDesign)
dat<-gen.factorial(levels=3,nVars=3,varNames=c("A","B","C"))
desD<-optFederov(~quad(A,B,C),data=dat,nTrials=14,eval=TRUE)

levels<-seq(-1,1,by=.1)
dat<-expand.grid(list(A=levels,B=levels,C=levels)) ## grille avec 9261 essais
desL <- optFederov(~quad(.), data=dat, nTrials=14, eval=TRUE)

# EXEMPLES 2 : plan fractionnaire 2^{4-1}
dat <- gen.factorial(levels=2,nVars=4,varNames=LETTERS[1:4])
desH <- optFederov(~.,data=dat,8)

# Plan orthogonal de Plackett-Burman
dat<-gen.factorial(levels=2,nVars=11,varNames=LETTERS[1:11]) # 2048 essais
desPB<-optFederov(~.,data=dat,12,nRepeats=20)
X <- model.matrix(~.,data=desPB$design) ## pour vérifier l'orthogonalité
t(X)%*%X

# Construction d'un carré latin (il faut nRepeats suffisamment grand)
lv<-factor(1:5)
dat<-expand.grid(A=lv,B=lv,C=lv)
desL<-optFederov(~.,data=dat,nTrials=25,nRepeats=100)
```

# Construction de plans optimaux avec R

```
# EXEMPLE 3: essais imposés
dat<-gen.factorial(levels=3,nVars=3,varNames=c("A","B","C"))
desD<-optFederov(~quad(A,B,C),data=dat,nTrials=14,eval=TRUE)

# ajout d'essais au plan précédent
dat<-gen.factorial(levels=3,nVars=3,varNames=c("A","B","C"))
desA<-optFederov(~quad(.), data=dat, nTrials=25, augment=TRUE, rows=desD$rows)

# Le plan desH est complété pour prendre en compte une interaction:
dat <- gen.factorial(levels=2,nVars=5,varNames=LETTERS[1:5])
desH <- optFederov(~., data=dat, nTrials=8)
desH2 <- optFederov(~A+B+C+D+E+I(A*B), data=dat, nTrials=10,
        augment=TRUE, rows=desH$rows)
```