Proposition de correction du TD sur les plans avancés

Module de plan d'expériences - F. Husson - Agrocampus

Exercice 1 : Plan de dégustation

1. Trois facteurs influencent la réponse : le produit, le juge et le rang de dégustation. Ces facteurs ont le même nombre de modalités (6) et l'on peut utiliser un carré latin.
2. Pour la première ligne, on range les produits dans un ordre quelconque. On obtient les lignes suivantes par permutations circulaires.
3. Pour chaque facteur les modalités sont équilibrées (= de même effectif = 6). Par construction, les effets principaux sont orthogonaux. L'interaction entre deux facteurs est confondue partiellement avec le troisième. Cette propriété est classique des carrés latins. Elle se retrouve facilement en considérant les degrés de liberté du modèle utilisé ci-après.
4. Compte tenu des propriétés du plan, le modèle ne peut contenir que des effets principaux.

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}$$

   5 ddl sont utilisés par facteurs, 1 ddl pour la constante, il reste donc $36 - 16 = 20$ ddl pour la résiduelle.
   Remarque. Le plan proposé est critiquable en ce sens que, dans l'ordre de présentation, chaque produit apparaît soit en premier soit toujours après le même autre produit. On peut donc craindre des effets de succession. Il existe des carrés latins spéciaux (dits « équilibrés pour les voisinages » ou « de Williams ») qui prennent en compte l'effet de succession. Ces plans, que les praticiens trouvent dans des tables, dépassent le cadre de ce module d'enseignement.

Exercice 2 : Etude sur photos

1. On peut choisir 2 femmes parmi les 4 au temps T0, les 2 autres seront alors au temps T2. Pour cela, il y a 6 choix possible pour avoir 2 femmes au temps T0. Et donc chacun de ces 6 choix sera proposé à 10 juges. On aura bien 60 juges, chacun voyant 2 femmes au temps T0 et 2 autres femmes au temps T2.
   Autre solution : Il suffit de considérer 3 facteurs avec un nombre de modalités différents. Le plan proposé par la fonction oa.design contient trop d'essais (c'est le plan complet). On va donc construire un plan optimal.

```
library(DoE.base)
plan <- oa.design(nlevels=c(60,4,2),factor.names=list(juge=paste("J",1:60,sep=""),
    femme=paste("F",1:4,sep=""),temps=c("t0","t4")))
library(AlgDesign)
planOpt <- optFederov(~.,plan,240)

planOpt <- optFederov(~juge+femme+temps+temps:femme,plan,240)

table(planOpt$design[,1:2])
table(planOpt$design[,c(1,3)])
table(planOpt$design[,c(2,3)])
```

Exercice 3 : Construction d'un plan $L_{16}2^3 34$

1. En construisant ce plan, on peut voir que la matrice $(X'X)$ est presque diagonale. Qu'il y a une corrélation nulle entre les facteurs à 2 modalités et les autres facteurs. Mais on parle ici de pseudo-orthogonalité car avec la fonction table, on voit que les lignes sont indépendantes (au sens du χ^2) mais les termes de la matrice ne sont pas constants.

```
plan

   A B C D E
1  1 1 1 1 1
2  2 4 1 2 2
```

```
3  4 2 2 1 2
4  2 3 2 2 1
5  2 2 1 2 2
6  4 3 1 1 1
7  2 1 2 2 1
8  1 4 2 1 2
9  2 3 2 1 2
10 1 2 2 2 1
11 2 4 1 1 1
12 4 1 1 2 2
13 4 4 2 2 1
14 2 1 2 1 2
15 1 3 1 2 2
16 2 2 1 1 1
```

```
X <- model.matrix(~.,plan)
round(t(X)%*%X,0)
```

```
            (Intercept) A1 A2 B1 B2 B3 C1 D1 E1
(Intercept)          16  0  4  0  0  0  0  0  0
A1                    0  8  4  0  0  0  0  0  0
A2                    4  4 12  0  0  0  0  0  0
B1                    0  0  0  8  4  4  0  0  0
B2                    0  0  0  4  8  4  0  0  0
B3                    0  0  0  4  4  8  0  0  0
C1                    0  0  0  0  0  0 16  0  0
D1                    0  0  0  0  0  0  0 16  0
E1                    0  0  0  0  0  0  0  0 16
```

```
table(plan[,2:3])
```

```
   C
B   1 2
  1 2 2
  2 2 2
  3 2 2
  4 2 2
```

```
table(plan[,c(1,3)])
```

```
   C
A   1 2
  1 2 2
  2 4 4
  4 2 2
```

```
library(DoE.base)
plan <- oa.design(nlevels=c(2,2,2,3,4))  ## 24 essais
X <- model.matrix(~.,plan)
round(t(X)%*%X,0)
```

```
            (Intercept) A1 B1 C1 D.L D.Q E.L E.Q E.C
(Intercept)          24  0  0  0   0   0   0   0   0
A1                    0 24  0  0   0   0   0   0   0
B1                    0  0 24  0   0   0   0   0   0
C1                    0  0  0 24   0   0   0   0   0
D.L                   0  0  0  0   8   0   0   0   0
D.Q                   0  0  0  0   0   8   0   0   0
E.L                   0  0  0  0   0   0   6   0   0
E.Q                   0  0  0  0   0   0   0   6   0
E.C                   0  0  0  0   0   0   0   0   6
```

```
table(plan[,1:2])
```

```
   B
A   1 2
  1 6 6
  2 6 6
```

```
table(plan[,c(1,3)])
```

```
   C
A   1 2
  1 6 6
  2 6 6
```

```
table(plan[,c(1,4)])
```

```
   D
A   1 2 3
  1 4 4 4
  2 4 4 4
```

```
table(plan[,c(1,5)])
```

```
   E
A   1 2 3 4
  1 3 3 3 3
  2 3 3 3 3
```

```
table(plan[,c(4,5)])
```

```
   E
D   1 2 3 4
  1 2 2 2 2
  2 2 2 2 2
  3 2 2 2 2
```

Exercice 4 : Recettes de chocolat

1. On est en présence de 4 facteurs pour établir la recette. Il faut construire un plan $L_{16}4^4$.
   On va construire un plan 2^{8-4} et prendre 2 facteurs pour construire un facteur à 4 modalités en prenant la règle $-- = 1$, $-+ = 2$, $+- = 3$ et $++ = 4$.
2. Dans le plan 2^{8-4} on peut encore confondre un facteur à 2 modalités avec l'interaction d'ordre le plus élevé. On pourra ainsi prendre pour le facteur cuisinier l'interaction d'ordre le plus élevé.
3. Les données issues de ce plan seront analysées à l'aide d'un modèle incluant tous les effets principaux. La variance résiduelle d'un tel modèle présente 16 - $(1+ 3 + 3 + 3 + 3 + 1) = 2$ ddl. Par construction, tous les effets de ce modèle sont orthogonaux deux à deux. On peut vérifier ces orthogonalités en calculant tous les tableaux croisant deux à deux les effets de ce modèle.
4. Ce qui est limitant ici, c'est le nombre de degrés de liberté. Ayant 2 ddl pour la résiduelle dans le modèle précédent, il est encore possible d'ajouter à ce plan un facteur 2 facteurs à 2 modalités (mais nous n'aurons plus de degrés de liberté pour la résiduelle) et il n'est pas possible d'estimer un facteur supplémentaire à 4 modalités.