

# Travaux dirigés sur les plans fractionnaires

Module de plan d'expériences - F. Husson - Institut Agro

## Exercice 1 : CONFUSIONS DANS UN PLAN D'EXPÉRIENCES $2^{3-1}$

On étudie l'influence de trois facteurs qualitatifs  $A, B, C$ , présentant chacun 2 modalités (notées 1 et 2) sur une réponse  $Y$  à partir de 4 essais. Les conditions de l'expérience sont présentées dans le tableau 1.

Essai	A	B	C
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

TABLE 1 – Présentation du plan pour 3 facteurs

1. Écrire la matrice des essais.
2. Écrire la matrice des effets associée au modèle contenant tous les effets principaux et toutes les interactions (d'ordre 2 et 3). En déduire la liste des confusions de ce plan puis la résolution du plan.
3. Quel modèle peut-on étudier avec ce plan ? Quelles hypothèses doit-on poser ?

## Exercice 2 : PLAN $2^{6-2}$

L'objectif de cet exercice est de construire un plan de résolution IV permettant d'étudier 6 facteurs à 2 niveaux en 16 essais.

1. Combien d'essais sont nécessaires pour construire un plan complet à 6 facteurs ?
2. Quel plan de base choisissez-vous pour étudier les 6 facteurs en 16 essais ?

On se propose d'étudier le modèle saturé associé à ce plan. La matrice des effets contient les colonnes suivantes :

I	1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	124	134	234	1234
---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	------

3. Avec quels effets choisissez-vous de confondre les facteurs 5 et 6 ? Déduire toutes les autres confusions du plan. Quelle est la résolution de ce plan ?
4. Peut-on estimer sans ambiguïté tous les effets principaux et toutes les interactions d'ordre 2 ?
5. Combien doit-on réaliser d'essais (au minimum) pour pouvoir estimer sans ambiguïté tous les facteurs principaux et toutes les interactions d'ordre 2 ? Et quelles hypothèses doit-on faire ?

## Exercice 3 : DÉPOUILLEMENT D'UN PLAN D'EXPÉRIENCES POUR 4 FACTEURS

On étudie l'influence de 4 facteurs  $F1, F2, F3$  et  $F4$ , présentant chacun 2 modalités (notées 1 et 2) sur une réponse  $Y$ . Les conditions et les résultats de l'expérience sont regroupés dans le tableau 2. Ce tableau présente également la matrice des essais recodée : la modalité « 2 » est simplement remplacée par la modalité « -1 ».

1. Commenter brièvement ce plan : les effets principaux sont-ils orthogonaux ? quelle est la résolution de ce plan ? ce plan est-il fractionnaire ?
2. Quelle méthode permet de dépouiller ces résultats ?
3. On s'intéresse uniquement aux effets principaux. Écrire le modèle correspondant sous forme indicée.
4. Saisir les données puis faire l'analyse avec R. Utiliser la fonction `LinearModel` de `FactoMineR`.

Essai	F1	F2	F3	F4	Y	F1	F2	F3	F4
1	1	1	1	1	29	1	1	1	1
2	1	1	2	2	1	1	1	-1	-1
3	1	2	1	2	-3	1	-1	1	-1
4	1	2	2	1	5	1	-1	-1	1
5	2	1	1	2	-9	-1	1	1	-1
6	2	1	2	1	3	-1	1	-1	1
7	2	2	1	1	-5	-1	-1	1	1
8	2	2	2	2	-21	-1	-1	-1	-1

TABLE 2 – Plan proposé pour 4 facteurs et matrice des essais recodée

#### Exercice 4 : CONSTRUCTION D'UN PLAN $2^{8-4}$

On veut construire un plan à 8 facteurs à 2 niveaux tels que les effets principaux soient confondus avec des interactions d'ordre 3 ou plus.

1. Donner les générateurs d'alias d'un tel plan.
2. Les effets principaux et les interactions d'ordre 2 sont-elles estimables sans ambiguïté ?
3. Est-il possible de tester quelques interactions d'ordre 2 avec le plan que vous avez construit ? Si oui, combien ? Si toutes les interactions d'ordre 2 ne peuvent pas être testées, comment faire pour pouvoir toutes les tester ?
4. Construire ce plan sous R en utilisant la fonction `FrF2` du package `FrF2`. Calculer la matrice  $(X'X)^{-1}$  quand vous utilisez ce plan et que vous construisez un modèle avec seulement les effets linéaires (utiliser la fonction `model.matrix` pour calculer  $X$ ). Refaire la même chose en ajoutant au modèle les interactions entre les facteurs A-B, A-C. Interpréter.

#### Exercice 5 : COMMENT PESER AVEC PRÉCISION ?

On s'intéresse à la précision des mesures de pesées effectuées par une balance de Roberval (voir figure 1).



FIGURE 1 – Balance de Roberval

On désire peser 4 objets A, B, C et D avec le maximum de précision. On sait que pour une pesée, la précision avec cette balance est de l'ordre de 1 gramme (i.e. l'écart-type est de 1 gramme, indication fournie par le constructeur). On va utiliser la méthodologie des plans d'expériences en considérant qu'un objet correspond à 1 facteur. On utilisera la convention suivante : si l'objet est déposé dans le plateau de gauche, le poids est compté positivement ; s'il est déposé dans le plateau de droite, le poids est compté négativement ; et si l'objet n'est sur aucun plateau, son poids n'est pas compté.

La matrice des essais correspondant à la pesée « classique » dans lequel on pèse les objets séparément est donnée au tableau 3.

Essai	A	B	C	D
pesée 1	1	0	0	0
pesée 2	0	1	0	0
pesée 3	0	0	1	0
pesée 4	0	0	0	1

TABLE 3 – Présentation du plan pour la pesée classique

On décide de faire les pesées du tableau 4.

Essai	Objets sur le plateau gauche	Objets sur le plateau droit	Poids ajoutés sur le plateau droit
pesée 1	A, B, C, D	aucun	150
pesée 2	A, B	C, D	50
pesée 3	A, C	B, D	10
pesée 4	A, D	B, C	30

TABLE 4 – Pesées pour 4 essais

Les résultats des pesées (en gramme) sont les suivantes :  $Y_1 = 150$ ,  $Y_2 = 50$ ,  $Y_3 = 10$ ,  $Y_4 = 30$ .

1. Donner le plan d'expériences qui a été utilisé lors de ces 4 pesées sous forme de matrice.
2. Après avoir précisé à quel paramètre correspondait le poids de chaque objet, donner une estimation du poids de chaque objet.
3. Comment peut-on calculer la précision des estimations de poids ? Quelle est la précision de chacune des estimations de poids (sachant que la précision de la balance est  $\sigma = 1$  gramme) ?

### Exercice 6 : ANALYSE CONJOINTE (OU TRADE OFF) EN MARKETING

L'analyse conjointe (ou Trade off) est souvent utilisée en marketing pour analyser le marché avant de lancer un nouveau produit. L'idée est de choisir parmi plusieurs produits celui qui sera le mieux perçu par les consommateurs. Le principe de l'analyse conjointe est le suivant : on demande à des consommateurs de classer plusieurs produits concurrents ou d'accorder une note à ces produits.

On veut choisir un emballage pour une nouvelle recette de crème caramel. Plusieurs critères (7) sont plus particulièrement étudiés :

- Le parfum : le parfum (caramel) est écrit en gros ou la marque est écrite en gros
- la DLC : la date limite de consommation est indiquée sur le couvercle ou sur le côté
- mention magnésium : la mention « le magnésium est bon pour la santé » est indiquée ou non
- Produit français : la mention « fabriqué en France » est indiquée ou non
- la couleur : une seule couleur (couleur caramel) ou plusieurs couleurs
- la taille des caractères : petite ou grande taille
- le fond : une photo en fond ou rien

Afin de réaliser l'analyse conjointe, l'entreprise peut faire des emballages correspondant à n'importe quelle combinaison des 7 critères. Cependant, la construction d'un emballage coûte cher et il n'est pas raisonnable de faire classer plus de 8 produits par un consommateur.

1. On décide de réaliser un plan en 8 essais. Quel est le nom du plan à construire ?
2. Construire le plan sous  $R$ . Donner les générateurs d'aliases et la résolution du plan.
3. On suspecte une interaction possible entre les critères « mention magnésium » et « produit français » (si les deux mentions sont présentes, l'emballage est trop surchargé de mentions). Avec le plan que vous avez construit, pouvez-vous analyser cette interaction ? Si oui, comment faites-vous ? Si non, comment feriez-vous ?

Une fois ces emballages fabriqués, 100 consommateurs sont interrogés et doivent mettre une note comprise entre 0 (l'emballage ne me plaît pas) et 10 (l'emballage me plaît beaucoup) pour chacun des emballages (il y a alors 800 données).

4. Comment analysez-vous ces résultats (préciser le modèle utilisé) ?

### Exercice 7 : PLAN $L_8 2^3 4$ ET $L_8 2^4 4$

On étudie un processus au travers d'une variable réponse  $Y$ . A priori, 4 facteurs influent sur  $Y$  :

- 3 facteurs ( $F1$ ,  $F2$  et  $F3$ ) à deux modalités chacun ;
- 1 facteur ( $F4$ ) à 4 modalités.

On néglige a priori toutes les interactions.

On cherche à construire un plan en 8 essais permettant d'étudier simultanément ces 4 facteurs. Pour que ces 4 facteurs soient orthogonaux, on se fonde sur la matrice des effets (du modèle complet) du plan combinant  $F1$ ,  $F2$  et  $F3$ . On sait que deux colonnes de cette matrice définissent un facteur à 4 modalités (par exemple en notant ;  $- - = 1$  ;  $- + = 2$  ;  $+ - = 3$  ;  $+ + = 4$ ).

1. À partir de ce principe, construire un plan tel que les effets principaux des 4 facteurs  $F1$ ,  $F2$ ,  $F3$  et  $F4$  sont orthogonaux. Ce plan est noté  $L_8 2^3 4$  car il y a 8 essais, 3 facteurs à 2 niveaux et un facteur à 4 niveaux.
2. Avec quoi (quel facteur ou quelle interaction) est confondu le facteur à 4 niveaux ?
3. Le plan  $L_8 2^4 4$  existe-t-il ? Si oui, comment le construire ?

### Exercice 8 : RÉPARTITION DES EXPÉRIENCES SUR 2 ÉQUIPES DE TRAVAIL

Vous voulez étudier l'influence de 3 facteurs qualitatifs  $F1$ ,  $F2$  et  $F3$  présentant chacun 2 modalités :

- $F1$  est le facteur température qui peut prendre les valeurs 30 et 45 degrés ;
- $F2$  est le facteur pression qui peut prendre les valeurs 2 et 4 bars ;
- $F3$  est la vitesse de rotation de l'appareil qui peut prendre les valeurs 900 tours/minute et 1200 tours/minute.

On peut effectuer 8 expériences donc réaliser un plan complet. Vous voulez alors répartir ces 8 essais pour 2 équipes de travail (4 essais par équipe).

*Les deux équipes pouvant travailler de façon différente, décrire précisément les 4 essais que vous décidez de faire réaliser par chacune des équipes de travail.*